

CONTENTS

FULL PAPERS

- A relation between the Schrödinger operator for a Hydrogen-like atom
and that for a certain type of one-dimensional two-body problem
..... *Hiroshi Oda* 3

ARTS&DESIGNS

- Aesthetic Design of Viaduct of Busan Light Rail Transit
..... *Yutaka Nagami, Yoshiaki Kubota, Wang Jiyoun, Kazuo Sugiyama
Okamoto Toshiya, Matsugane Shin, Akira Ikuo, Yonezawa Eiji* 17

SHORT NOTES

- Particle-based Visual Simulation for Large-scale Landscape Images
..... *Tsukasa Kikuchi* 23

REVIEWS

- The design proposals of the regional learning tool for children
..... *Yoshiaki Kudo* 29
Black holes as quantum many-body systems..... *Yasuhiro Sekino* 37

ABSTRACTS

- Estimation of Common Mode Current on Coaxial Cable with Twisted Wire Pair
..... *Takehiro Takahashi, Li Niu, Todd Hubing* 47

REPORTS

- My research stay at MIT..... *Hiroshi Oda* 53

- RESEARCHES & TITLES 63

- ACADEMICREPORTS
& SOCIAL ACTIVITIES 71

論文

FULL PAPERS

水素様原子の Schrödinger 作用素とある 1 次元 2 体問題の Schrödinger 作用素の関係

A Relation between the Schrödinger Operator for a Hydrogen-Like Atom and That for a Certain Type of One-Dimensional Two-Body Problem

織田 寛 Hiroshi ODA

Abstract

The part of the quantum mechanics for a hydrogen-like atom consisting of its s-orbital and p-orbital states with magnetic quantum number 0 is shown to be equivalent to the quantum mechanics for a certain type of one-dimensional two-body problem defined by a Dunkl-Laplacian. A formula is also given which describes the correspondence of natural differential operators acting on the s-orbital and p-orbital states with magnetic quantum number 0 to differential-difference operators acting on the quantum states of the one-dimensional two-body problem.

概要

“水素様原子の量子力学”の状態空間を s 軌道と p 軌道の磁気量子数 0 の空間に制限したものが、Dunkl-Laplace 作用素が定める“1 次元 2 体問題の量子力学”と同等であることを示す。また、s 軌道と p 軌道の磁気量子数 0 の状態ベクトルに自然に作用する微分作用素を、1 次元 2 体問題の状態ベクトルに作用する微分差分作用素に対応させる公式を与える。

1 Schrödinger 作用素

まず n 次元 Euclid 空間 $X: \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ ($n \geq 3$) における水素様原子の Schrödinger 作用素を考える。 X の各要素を n 次元縦ベクトルと見なすと、回転群 $K := SO(n)$ が左からの掛け算で自然に作用する。Laplace 作用素 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ は K 不変 (回転不変) であるが、これに回転対称なポテンシャル $V = V(|x|)$ ($|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$) を合わせた Hamilton 作用素

$$(1.1) \quad H = -\Delta + V(|x|)$$

を考察する (簡単のため Dirac 定数 $\hbar$ 等は 1 に規格化している)。状態空間は $L^2(X)$ である。加藤の定理によりポテンシャルが

$$V = V_1 + V_2, \quad V_1 \in L^p(X), \quad V_2 \in L^\infty(X), \quad \begin{cases} p=2 & (n=3) \\ p>n/2 & (n \geq 4) \end{cases}$$

と表せるとき、 H は Sobolev 空間

$$\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(\Delta) = \{\varphi \in L^2(X) \mid \Delta\varphi \in L^2(X)\}$$

を定義域とし、 $C_c^\infty(X)$ (コンパクトな台を持つ C^∞ 級関数の空間) をコアとする自己共役作用素となる ([中村, §4.3] 参照)。例えば、Coulomb ポテンシャル

$$V = \frac{c}{|x|} \quad (c \text{ は定数})$$

の場合この主張は正しい (ただし、高次元の Coulomb ポテンシャルを物理的により自然な $V = c/|x|^{n-2}$ とすると、残念ながら加藤の定理の仮定は $n=3$ の場合にしか満たされない)。Schrödinger 方程式は $L^2(X)$ に値を取る未知関数 $\psi(t)$ に対する

$$i \frac{d}{dt} \psi(t) = H\psi(t)$$

である。

K の X への作用は、 K の X 上の関数 $\varphi(x)$ への作用を引き起こす:

$$(1.2) \quad (k\varphi)(x) = \varphi(k^{-1}x), \quad k \in K.$$

特に $L^2(X)$ への作用はユニタリである。§3 で詳しく見るように、 K の作用に対する状態ベクトル (波動関数) の振る舞い方を表す“方位量子数” $l = 0, 1, 2, \dots$ によって、 $L^2(X)$ は

$$(1.3) \quad L^2(X) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} L_l^2(X)$$

のように直和分解する。 $L_l^2(X)$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) に属する状態ベクトルは、それぞれ s 軌道、p 軌道、d 軌道、... と呼ばれるものである。 $n-1$ 次元球面 $S (\subset X)$ 上の l 次 (超) 球関数が作る空間 $\mathcal{H}_l(S)$ は K の既約ユニタリ表現であるが、各 $L_l^2(X)$ は $\mathcal{H}_l(S)$ と同型な $L^2(X)$ の部分空間の和に等しく、

$$(1.4) \quad L_l^2(X) = \mathcal{H}_l(S) \otimes \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X))$$

という Hilbert 空間としてのテンソル積分解を持つ。ここで $\text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X))$ は既約表現 $\mathcal{H}_l(S)$ に対する重複度空間と呼ばれ、作用素ノルムにより Hilbert 空間の構造が入る。

H のように回転対称性のある閉作用素は (1.3)、(1.4) に両立する分解を持つ。すなわち、各 l に対して $\text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X))$ 上の作用素 H_l が定まって、 H が

$$(1.5) \quad H = \bigoplus_{l=0}^{\infty} 1 \otimes H_l$$

と分解される。 H の自己共役性の有無、スペクトルや固有関数を決定する問題は各 H_l に対する同様の問題に帰着される ([T, Chapter 2] 参照)。

H_l が作用している空間 $\text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X))$ は、2 つの Hilbert 空間と自然に同型になる。まず、 K の $(1, 0, \dots, 0) \in S$ に対する固定群は

$$(1.6) \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \mid g \in SO(n-1) \right\}$$

であるが、 $\mathcal{H}_l(S)$ の M 不変ベクトル全体 $\mathcal{H}_l(S)^M$ は $\mathcal{H}_l(S)$ の 1 次元部分空間になる (命題 3.1 (ii))。 Ω を $n-1$ 次元球面 S の表面積とすると、 $v_l^{(1)}(1, 0, \dots, 0) = \sqrt{\frac{\dim \mathcal{H}_l(S)}{\Omega}}$ となる $v_l^{(1)} \in \mathcal{H}_l(S)^M$

* 原稿受付 平成 26 年 11 月 18 日

が唯一存在して、

$$\|v_l^{(1)}\|^2 = \int_S |v_l^{(1)}|^2 d\omega = 1$$

を満たす (補題 4.1)。($v_l^{(1)}$ をこの規格化条件と $v_l^{(1)}(1, 0, \dots, 0) > 0$ という性質で特徴づけることもできる。) 規格化条件から次はユニタリ変換になる:

$$(1.7) \quad \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X)) \xrightarrow{\sim} L^2(X)^M; \Phi \mapsto \Phi[v_l^{(1)}].$$

回転対称な閉作用素 H は $L^2_l(X)^M$ の閉作用素に制限できるが、それをこの変換により左辺に対する作用素と見なしたものが分解 (1.5) における H_l に他ならない。 $L^2_l(X)^M$ は “方位量子数 l 、磁気量子数 0 の状態ベクトルの空間” という物理的な意味を持つ (注意 3.3)。

次に、回転に対して横断的な方向に延びている X の部分 Euclid 空間 $A = \{(r, 0, \dots, 0)\} \simeq \mathbb{R}$ に X 上の関数を制限する写像を γ_A とする。 γ_A は $L^2(X)$ 全体に対しては意味をなさないが、各 $L^2_l(X)$ 上では問題なく定義される (§4 参照)。 M は A の各点を動かさないような K の部分群なので、 A を全体として動かさないような K の部分群

$$\text{Norm}_K(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \mid g \in O(n-1), \pm \det g = 1 \right\}$$

により有限群 $W := \text{Norm}_K(A)/M$ を定めると、これは A に自然に作用する。 $|W|=2$ で、 W の非自明な要素 σ の A 上の関数 $f(r)$ に対する作用は

$$(\sigma f)(r) = f(\sigma^{-1}r) = f(-r)$$

である。一方、 $\mathcal{H}_l(S)^M$ は W の自然な作用により l の偶奇に応じて W の自明表現 triv または符号表現 sgn と同型な 1 次元表現になる (命題 4.2 (i))。本稿では、 W 加群 $\mathcal{H}_l(S)^M$ のノルムは K 加群 $\mathcal{H}_l(S)$ のノルム $\|\cdot\|$ の制限ではなく、

$$\|v\|_W = \sqrt{|v(1, 0, \dots, 0)|^2 + |v(-1, 0, \dots, 0)|^2} \left(= \sqrt{\frac{2 \dim \mathcal{H}_l(S)}{\Omega}} \|v\| \right)$$

を用いることにする ($S^M = \{(\pm 1, 0, \dots, 0)\}$ なのでこのノルムも幾何学的に自然である)。このもとに、制限写像 γ_A が定める次の線形写像はユニタリ変換になる (命題 4.2 (iii)):

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \Gamma_A^l : \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X)) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_W(\mathcal{H}_l(S)^M, L^2(A, |r|^{n-1} dr)); \\ \Phi &\mapsto \gamma_A \circ \Phi|_{\mathcal{H}_l(S)^M}. \end{aligned}$$

(1.7) と違い、今度は左辺に作用している H_l を右辺の作用素に書き換えるのは容易ではない。まず古典的な動径成分公式として、任意の $\Phi \in \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X))$ に対して

$$(1.9) \quad \Gamma_A^l(\Delta \circ \Phi) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(n+l-2)}{r^2} \right) \circ \Gamma_A^l(\Phi)$$

が成り立つ。これは例えば [O1, Lemma 3.10] の証明中の計算を $G = SO(n, 1)_0$ ($SO(n, 1)$ の単位元連結成分) の場合に具体的にやって導くことができる。水素様原子のエネルギー単位を

求めたりするときには本質的にこの公式が用いられるが、これを (1.8) における自己共役作用素の対応と考える際には実は微妙な問題がある。というのは、(1.8) の関数空間を C_c^∞ に変えた

$$(1.10) \quad \Gamma_A^l : \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X)) \rightarrow \text{Hom}_W(\mathcal{H}_l(S)^M, C_c^\infty(A))$$

が $l \geq 2$ の場合には全射でなくなり、

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \Gamma_A^l(\text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X))) &= \text{Hom}_W(\mathcal{H}_l(S)^M, r^l C_c^\infty(A)) \\ &= \text{Hom}_W(\mathcal{H}_l(S)^M, r^{l-1} C_c^\infty(A)) \quad (l \text{ が奇のとき}) \end{aligned}$$

となっているからである ([Hel, Ch. III, Proposition 11.4])。従って、(1.10) の左辺が (1.8) の左辺に作用する自己共役作用素 $\Delta \circ \cdot$ の自然なコアであるのに対して、(1.10) の右辺は (1.8) の右辺に作用する自己共役作用素

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(n+l-2)}{r^2} \right) \circ \cdot$$

のコアになっているとは安易にいえず、実際 $n=3$ で l が偶のときはそうっていない。

一方、 $l=0, 1$ で (1.10) が全射となるときはこのような問題が一切生じないので、以降ではその 2 つの場合のみに注目することにする。これらの場合の (超) 球関数の空間は $\mathcal{H}_0(S) = \mathbb{C}$ 、 $\mathcal{H}_1(S) = \mathbb{C}\text{-span}\{x_1|_S, \dots, x_n|_S\}$ となり、それぞれ K の表現として自明表現、ベクトル表現と同型である (命題 3.4)。 $\Gamma_A := \Gamma_A^0 \oplus \Gamma_A^1$ とし、(1.8) と (1.10) をそれぞれ

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \Gamma_A : \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X)) &\xrightarrow{\sim} \\ &\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_W(\mathcal{H}_l(S)^M, L^2(A, |r|^{n-1} dr)), \end{aligned}$$

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \Gamma_A : \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X)) &\xrightarrow{\sim} \\ &\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_W(\mathcal{H}_l(S)^M, C_c^\infty(A)) \end{aligned}$$

とまとめて書く。 $C_c^\infty(A)$ (あるいは $C^\infty(A)$) に作用する微分差分作用素

$$\mathcal{D}_r = \frac{d}{dr} + \frac{n-1}{2r}(1-\sigma)$$

は A_1 型の Dunkl 作用素のパラメータが特別なもので、[Dun, Theorem 1.10] より

$$(\mathcal{D}_r)^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n-1}{2r^2}(1-\sigma)$$

が成り立つので、これを用いて (1.9) を

$$(1.14) \quad \Gamma_A(\Delta \circ \Phi) = (\mathcal{D}_r)^2 \circ \Gamma_A(\Phi), \quad \forall \Phi \in \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X))$$

と統一的に書くことができる。ノルム $\|\cdot\|_W$ に関する単位ベクトル $v_{\text{triv}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\Omega}{2}} v_0^{(1)} \in \mathcal{H}_0(S)^M$ 、 $v_{\text{sgn}} = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1|_S = \sqrt{\frac{\Omega}{2n}} v_1^{(1)} \in$

$\mathcal{H}_l(S)^M$ を用いると Hilbert 空間の同型

$$\begin{aligned}
 (1.15) \quad & \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_W(\mathcal{H}_l(S)^M, L^2(A, |r|^{n-1}dr)) \\
 & \simeq \mathbb{C}v_{\text{triv}} \otimes \text{Hom}_W(\mathbb{C}v_{\text{triv}}, L^2(A, |r|^{n-1}dr)) \\
 & \quad \oplus \mathbb{C}v_{\text{sgn}} \otimes \text{Hom}_W(\mathbb{C}v_{\text{sgn}}, L^2(A, |r|^{n-1}dr)) \\
 & = L^2(A, |r|^{n-1}dr)^\sigma \oplus L^2(A, |r|^{n-1}dr)^{-\sigma} \\
 & = L^2(A, |r|^{n-1}dr)
 \end{aligned}$$

が得られる。最後の空間はさらに線形写像

$$f(r) \mapsto f(r)|r|^{\frac{n-1}{2}}$$

により $L^2(A) = L^2(A, dr)$ に同型である。(1.15) の最初の空間に対する自己共役作用素 $(\mathcal{O}_r)^2 \circ \cdot$ は $L^2(A, |r|^{n-1}dr)$ 上では明らかに “Dunkl-Laplace 作用素” $(\mathcal{O}_r)^2$ であり、 $L^2(A)$ 上では

$$\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} - \frac{n-1}{2r^2}(1-\sigma)$$

となるのが容易に計算される（ただし、構成より自然に定まるコアは $|r|^{\frac{n-1}{2}}C_c^\infty(A)$ ）。これは本質的には 1 次元 2 体問題の Schrödinger 作用素の形をしている。つまり、新しい独立変数 s を持つ状態空間 $L^2(\mathbb{R})$ に対する自由粒子の Schrödinger 作用素（の -1 倍） $\frac{d^2}{ds^2}$ とテンソルして作用素

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d^2}{ds^2} - \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} - \frac{n-1}{2r^2}(1-\sigma)$$

を作り、 $r = (\xi - \eta)/\sqrt{2}$ 、 $s = (\xi + \eta)/\sqrt{2}$ と変数変換すると

$$\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{(n-1)^2}{2|\xi - \eta|^2} + \frac{n-1}{|\xi - \eta|^2}\tilde{\sigma}, \quad (\tilde{\sigma}\psi)(\xi, \eta) = \psi(\eta, \xi)$$

の形になる。

以上より次を得た。

定理 1.1. (i) Hilbert 空間として、s 軌道と p 軌道の磁気量子数 0 の状態ベクトルの空間 $L_0^2(X)^M \oplus L_1^2(X)^M = L_0^2(X) \oplus L_1^2(X)^M$ は (1.7) により $\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X))$ と同型、後者は (1.12) と (1.15) により $L^2(A, |r|^{n-1}dr)$ と同型である。この同型において、

$$(L_0^2(X) \oplus L_1^2(X)^M) \cap C_c^\infty(X) \simeq \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X)) \simeq C_c^\infty(A)$$

という部分空間の対応が成立する。

(ii) $L^2(X)$ 上の K 不変な自己共役作用素 H に対して、その $L_0^2(X) \oplus L_1^2(X)^M$ への制限を考える。これは上の同型のもとに $\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X))$ に作用する自己共役作用素 $H_0 \oplus H_1$ (H_0 と H_1 は H から (1.5) により定まるもの) と、 $L^2(A, |r|^{n-1}dr)$ に作用するある自己共役作用素 $\text{rad}(H_0 \oplus H_1)$ に対応する。 H が $C_c^\infty(X)$ をコアに持つとき、 $\text{rad}(H_0 \oplus H_1)$ は $C_c^\infty(A)$ をコアに持つ。

(iii) 特に、 H が水素様原子の Schrödinger 作用素で (1.1) の形をした自己共役作用素であるとき、 $H_0 \oplus H_1$ に対応する $L^2(A, |r|^{n-1}dr)$ 上の自己共役作用素は、

$$\text{rad}(H_0 \oplus H_1) = -(\mathcal{Q}_r)^2 + V(|r|)$$

という 1 次元 2 体問題の Schrödinger 作用素の形をしている。

注意 1.2. 3 つのユニタリ変換 (1.7)、(1.12)、(1.15) を合成して得られるユニタリ変換 $L_0^2(X) \oplus L_1^2(X)^M \xrightarrow{\sim} L^2(A, |r|^{n-1}dr)$ は制限写像 γ_A ではなく、

$$(1.16) \quad \sqrt{\frac{\Omega}{2}}\gamma_A \oplus \sqrt{\frac{\Omega}{2n}}\gamma_A$$

である。

2. 動径成分公式の一般化

前節で以下の Hilbert 空間がすべて同型であることを見た：

$$\begin{aligned}
 L_0^2(X) \oplus L_1^2(X)^M & \xleftarrow[(1.7)]{\sim} \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X)) \\
 & \xrightarrow[(1.12)]{\sim} \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_W(\mathcal{H}_l(S)^M, L^2(A, |r|^{n-1}dr)) \\
 & \xrightarrow[(1.15)]{\sim} L^2(A, |r|^{n-1}dr).
 \end{aligned}$$

各 Hilbert 空間上の作用素は 1 対 1 に対応するが、その仕方が非自明なのは (1.12) の部分である。そこで、 $\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X))$ 上の自然な作用素 D が (1.12) のもとにどのような $\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_W(\mathcal{H}_l(S)^M, L^2(A, |r|^{n-1}dr))$ 上の作用素 $\text{rad}(D)$ (“ D の動径成分”) に対応するかを考察する。掛け算作用素を組み合わせさせて D を作った場合、掛け算している各関数を γ_A で制限するだけで $\text{rad}(D)$ が得られる。そこで本節では微分作用素により自然に定義される D が (1.12) の C_c^∞ 版である (1.13) のもとで対応する $\text{rad}(D)$ を求めることに目的を絞る。

Euclid 空間 X を座標系の原点を基準点として自身の接ベクトル空間と同一視し、計量ベクトル空間と見なす。任意の $\xi \in X$ は方向微分として $\varphi \in C_c^\infty(X)$ に作用する：

$$(\partial(\xi)\varphi)(x) := \frac{d}{dt}\varphi(x + t\xi)|_{t=0}.$$

これは X 上の複素化対称代数 $S(X_\mathbb{C})$ の $C_c^\infty(X)$ への作用 ∂ に自然に拡張できる。実際、 $\frac{\partial}{\partial x_v} \in T_0X$ ($v = 1, \dots, n$) を簡単に ∂_v と書くと $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ は T_0X の正規直交基底となるが、同一視 $X \simeq T_0X$ のもと、 $S(X_\mathbb{C}) = \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ である。各 $\partial_v = \frac{\partial}{\partial x_v}$ は $C_c^\infty(X)$ へ記号どおりの作用をする。一般に可換 Lie 環としての X とコンパクト Lie 群 K の作用が定まったベクトル空間 $\mathcal{D}$ で

$$k(\xi(v)) = (k\xi)(kv), \quad k \in K, \xi \in X, v \in \mathcal{D}$$

を満たすものを (X, K) 加群と呼ぶ。 $C_c^\infty(X)$ や $S(X_\mathbb{C}) \otimes \mathcal{H}_l(S)$ ($l \in \mathbb{N}$) などは (X, K) 加群である。ただし後者への $S(X_\mathbb{C})$ の作

用は $S(X_{\mathcal{O}})$ 部分への掛け算とする。さて、Frobenius 相互律より、(1.13) の左辺に対して線形同型

$$(2.1) \quad \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X)) \simeq \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_{X,K}(S(X_{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X))$$

が成り立つ。ここで、 $\text{Hom}_{X,K}$ は (X, K) 加群の準同型、つまり X 加群の準同型にも K 加群の準同型にもなっているような線形写像の空間を表す。従って、(2.1) の右辺の各要素を 2 成分からなる横ベクトルのように見なすと、行列環

$$(2.2) \quad \mathcal{M} = \left\{ D = \begin{pmatrix} \Psi_0^0 & \Psi_0^1 \\ \Psi_1^0 & \Psi_1^1 \end{pmatrix} \middle| \Psi_i^j \in \text{Hom}_{X,K}(S(X_{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{H}_j(S), S(X_{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{H}_i(S)) \right\}$$

が写像の合成により (2.1) の右辺に右側から自然に作用する。前節で考察した Laplace 作用素 Δ から得られる (2.1) 上の作用素 $\Delta \circ \cdot$ は

$$(2.3) \quad \Delta \circ \cdot = \begin{pmatrix} ((\partial_1)^2 + \cdots + (\partial_n)^2) \times \cdot & 0 \\ 0 & ((\partial_1)^2 + \cdots + (\partial_n)^2) \times \cdot \end{pmatrix}$$

と書くことができ、このタイプに属する。他の $\mathcal{M}$ の要素も重複度空間の間の遷移を微分作用素で与えるものであり、表現論的には自然なものである。 $\mathcal{M}$ の具体的な構造は §7 で明らかになる。

$\mathbb{C}[\mathcal{D}_r]$ で $\mathcal{D}_r$ を不定元とする 1 変数多項式環を表す。 $C_c^\infty(A)$ は自然に $\mathbb{C}[\mathcal{D}_r]$ 加群であり、 W 加群でもある。一般に $\mathcal{D}_r$ の作用と有限群 $W = \{1, \sigma\}$ の作用が定まったベクトル空間 $\mathcal{D}$ で

$$\sigma(\mathcal{D}_r(v)) = -\mathcal{D}_r(\sigma(v)), \quad v \in \mathcal{D}$$

を満たすものを $(\mathbb{C}\mathcal{D}_r, W)$ 加群と呼ぶ。 $C_c^\infty(A)$ の他、 $\mathbb{C}[\mathcal{D}_r] \otimes \mathcal{H}_l(S)^M$ ($l \in \mathbb{N}$) などは $(\mathbb{C}\mathcal{D}_r, W)$ 加群である。Frobenius 相互律より、(1.13) の右辺に対して線形同型

$$(2.4) \quad \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_W(\mathcal{H}_l(S)^M, C_c^\infty(A)) \simeq \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{D}_r, W}(\mathbb{C}[\mathcal{D}_r] \otimes \mathcal{H}_l(S)^M, C_c^\infty(A))$$

が成り立つ。

定義 2.1. $\Psi_i^j \in \text{Hom}_{X,K}(S(X_{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{H}_j(S), S(X_{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{H}_i(S))$ ($i, j \in \{0, 1\}$) とするとき、 $\Gamma_i^j(\Psi_i^j) \in \text{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{D}_r, W}(\mathbb{C}[\mathcal{D}_r] \otimes \mathcal{H}_j(S)^M, \mathbb{C}[\mathcal{D}_r] \otimes \mathcal{H}_i(S)^M)$ を次のように定める。まず $\mathcal{H}_i(S)$ の正規直交基底 $\{v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots\}$ を $v_i^{(1)} \in \mathcal{H}_i(S)^M$ となるように取る ($v_i^{(1)}$ は §1 と異なるものでもよい)。また、 $v_j^{(1)} \in \mathcal{H}_j(S)^M \setminus \{0\}$ を取る。このとき

$$\Psi_i^j[1 \otimes v_j^{(1)}] = \sum_{\nu} p_{(\nu)}(\partial_1, \dots, \partial_n) \otimes v_i^{(\nu)}$$

を満たす多項式 $p_{(1)}, p_{(2)}, \dots \in S(X_{\mathcal{O}}) = \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ が定まるので、

$$\Gamma_i^j(\Psi_i^j)[f(\mathcal{D}_r) \otimes v_j^{(1)}] = f(\mathcal{D}_r) p_{(1)}(\mathcal{D}_r, 0, \dots, 0) \otimes v_i^{(1)}$$

と定める。この定義が $\{v_i^{(\nu)}\}$ や $v_j^{(1)}$ の取り方に依らないこと、 $\Gamma_i^j(\Psi_i^j) \in \text{Hom}_{\mathbb{C}\mathcal{D}_r, W}$ であることは容易に確認できる。

注意 2.2. この写像 $\{\Gamma_i^j\}$ は、実半単純 Lie 群に対して [O2, §6] で定めた “一般化された Harish-Chandra 準同型” の $G = SO(n, 1)_0$ の Cartan 運動群 $K \ltimes X$ に対する類似物である。実 Lie 群 $K \ltimes X$ は半単純ではないことに注意。

例 2.3. $l = 0, 1$ に対して $\Gamma_l^j(((\partial_1)^2 + \cdots + (\partial_n)^2) \times \cdot) = (\mathcal{D}_r)^2 \times \cdot$ である。

次の 2 つの定理が (1.14) を一般化した動径成分公式を与える。これらの証明は §5 で行う。

定理 2.4. $\Psi_i^j \in \text{Hom}_{X,K}(S(X_{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{H}_j(S), S(X_{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{H}_i(S))$, $\Psi_i^k \in \text{Hom}_{X,K}(S(X_{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{H}_k(S), S(X_{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{H}_i(S))$ ($i, j, k \in \{0, 1\}$) とする。このとき

$$\Gamma_i^k(\Psi_i^j \circ \Psi_j^k) = \Gamma_i^j(\Psi_i^j) \circ \Gamma_j^k(\Psi_j^k)$$

が成り立つ。従って、(2.4) の右辺の各要素を 2 成分からなる横ベクトルのように見なすと、 $\mathcal{M}$ が $\{\Gamma_i^j\}$ を通じて (2.4) の右辺に右側から自然に作用する。

定理 2.5. $\Phi^i \in \text{Hom}_K(\mathcal{H}_i(S), C_c^\infty(X)) = \text{Hom}_{X,K}(S(X_{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{H}_i(S), C_c^\infty(X))$, $\Psi_i^j \in \text{Hom}_{X,K}(S(X_{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{H}_j(S), S(X_{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{H}_i(S))$ ($i, j \in \{0, 1\}$) とする。このとき

$$\Gamma_A^j(\Phi^i \circ \Psi_i^j) = \Gamma_A^i(\Phi^i) \circ \Gamma_i^j(\Psi_i^j)$$

が成り立つ。従って、(2.1) と (2.4) への $\mathcal{M}$ の作用が線形同型写像 (1.13) と可換になる。言い換えると、 $\mathcal{M}$ の要素 $D = \begin{pmatrix} \Psi_0^0 & \Psi_0^1 \\ \Psi_1^0 & \Psi_1^1 \end{pmatrix}$ に対して

$$\text{rad}(D) := \begin{pmatrix} \Gamma_0^0(\Psi_0^0) & \Gamma_0^1(\Psi_0^1) \\ \Gamma_1^0(\Psi_1^0) & \Gamma_1^1(\Psi_1^1) \end{pmatrix}$$

と置くと、任意の $\Phi \in \bigoplus_{i=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_i(S), C_c^\infty(X))$ に対して

$$\Gamma_A(\Phi D) = \Gamma_A(\Phi) \text{rad}(D)$$

が成り立つ。

例 2.6. 特に $D = \Delta \circ \cdot$ のときに上の定理を当てはめると、(2.3) と例 2.3 より

$$\text{rad}(D) = \begin{pmatrix} (\mathcal{D}_r)^2 \times \cdot & 0 \\ 0 & (\mathcal{D}_r)^2 \times \cdot \end{pmatrix} = (\mathcal{D}_r)^2 \circ \cdot$$

となり、(1.14) と同じ結果が得られる。

定理 2.4 と定理 2.5 による動径成分公式はやや抽象的であるが、§7 で $\mathcal{M}$ の具体的な構造を明らかにした後に明示的な対応を与える。また、§6 で見るように行列環 $\mathcal{M}$ には自然な対合 $\cdot^* : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ がある。 $D^* = D$ のとき、 D は $\bigoplus_{i=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_i(S), C_c^\infty(X))$

を定義域とする $\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X))$ 上の対称作用素になる (定理 6.5)。これは、 $\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X))$ をコアとする本質的自己共役作用素である (定理 6.7)。このとき、定理 1.1 (i) より $\text{rad}(D)$ は $\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_W(\mathcal{H}_l(S)^M, C_c^\infty(A))$ をコアとする $\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_W(\mathcal{H}_l(S)^M, L^2(A, |r|^{n-1}dr))$ 上の本質的自己共役作用素となる。

3. $L^2(X)$ の分解

本節と次節では §1 で述べたことの詳細を論じる。 $X = \mathbb{R}^n$ には回転群 $K = SO(n)$ が作用していた。直積分解 $X \setminus \{0\} = S \times \mathbb{R}_{>0}$ ($S \subset X$ は $n-1$ 次元球面) において、 K は S の部分のみに作用する。一方、(1.6) で定めた K の部分群 M により等質空間として自然に $S \simeq K/M$ である。この分解から K の作用と両立するテンソル積分解

$$(3.1) \quad L^2(X) = L^2(S) \hat{\otimes} L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{n-1}dr)$$

が得られて、 $L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{n-1}dr)$ 側には K が自明に作用する。 K の ($\mathbb{C}$ 上の連続な) 既約有限次元表現の同値類全体を $\hat{K}$ とする。以降記号が煩雑になるのを避けるため、各類 $E \in \hat{K}$ と E を代表する表現の表現空間を同一視する。 $\hat{K}_M = \{E \in \hat{K} \mid E^M \neq \{0\}\}$ と置く。

命題 3.1. (i) X 上の K 調和多項式の空間

$$\mathcal{H}(X) = \{\varphi \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid \Delta\varphi = 0\}$$

は (1.2) で定めた作用により局所有限な K 加群となるが、同次成分への分解

$$\mathcal{H}(X) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_l(X)$$

がその (代数的) 既約分解を与える。

(ii) $\dim \mathcal{H}_l(X)^M = 1$ 、特に $\mathcal{H}_l(X)^M \in \hat{K}_M$ 。また、 $\mathcal{H}_l(X)$ ($l \in \mathbb{N}$) はどの 2 つも互いに同型でなく、これらが $\hat{K}_M$ 全体を尽くす。
(iii) X 上の多項式関数を S に制限する写像により、各 $\mathcal{H}_l(X)$ は $L^2(S)$ のある部分空間 $\mathcal{H}_l(S)$ と K 加群として同型になる。従って $\hat{K}_M = \{\mathcal{H}_l(S) \mid l \in \mathbb{N}\}$ としてよい。さらに、 K 加群の (Hilbert 空間としての) 既約分解

$$(3.2) \quad L^2(S) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_l(S)$$

が成り立つ。

(iv) (3.1) と (3.2) より得られる分解

$$(3.3) \quad L^2(X) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} L_l^2(X), \quad L_l^2(X) := \mathcal{H}_l(S) \otimes L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{n-1}dr)$$

が、 $L^2(X)$ の抽象的な等質成分への分解

$$L^2(X) = \bigoplus_{E \in \hat{K}} E \otimes \text{Hom}_K(E, L^2(X)) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_l(S) \otimes \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X))$$

を具体的に与えている。従って Hilbert 空間としての標準的な同型

$$(3.4) \quad L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{n-1}dr) \simeq \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X)); \\ c(r) \mapsto \left(v \mapsto v\left(\frac{x}{|x|}\right)c(|x|) \right)$$

が得られる。この同型により左辺の稠密な部分空間 $C_c^\infty(\mathbb{R}_{>0})$ が $\text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X))$ の中に写されるので、 $\text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X))$ が $\text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X))$ の稠密な部分空間であることが分かる。

注意 3.2. $\mathcal{H}_l(S)$ に属する関数は l 次 (超) 球関数と呼ばれ、Gegenbauer 関数を用いて具体的に表すことができる。

命題 3.1 の証明. どれもよく知られた古典的結果であるが、(i) は [GW, §5.6.4]、(ii) は [KR] の $SO(n, 1)_0$ の場合、(iii) は Frobenius 相互律と Peter-Weyl の定理 ([Kn, Chapter I, §5] 参照) から、(iv) は明らか。□

注意 3.3. $n = 3$ とすると、 $M = SO(2)$ は $K = SO(3)$ の極大トーラスになっている。また、 $SO(3) \simeq SU(2)/\{\pm 1\}$ なので $SU(2)$ の表現論 (= $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の表現論) が使えて、以下の結果を得る。まず、 $\hat{K} = \hat{K}_M$ である ($n > 3$ のときは $\hat{K} \supsetneq \hat{K}_M$)。次に、 l は物理的には“方位量子数”に当たり、 $\dim \mathcal{H}_l(S) = 2l + 1$ が成り立つ。 $L_l^2(X)$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) に属する状態ベクトルは、それぞれ s 軌道、p 軌道、d 軌道、... と呼ばれる。最後に、各 $\mathcal{H}_l(S)$ は、 $M = SO(2)$ の表現として 1 次元表現の直和に重複度なしに分解するが、 M の 1 次元表現の整数パラメータ (M ウェイト) が“磁気量子数”に当たる。 $\mathcal{H}_l(S)^M$ の要素が磁気量子数 0 のベクトルである。本稿ではこのような物理用語を n が一般の場合も濫用して、 $L_0^2(X)$ を“s 軌道の空間”、 $L_1^2(X)^M$ を“磁気量子数 0 の p 軌道の空間”などと呼ぶ。

命題 3.4. (i) $\mathcal{H}_0(S) = \mathbb{C}$ は自明な表現と同型である。従って $\mathcal{H}_0(S)^M = \mathcal{H}_0(S)$ 。

(ii) $\mathcal{H}_l(S) = \mathbb{C}\text{-span} \{x_1|_S, \dots, x_n|_S\}$ は $K = SO(n)$ のベクトル表現 $\mathbb{C}^n$ と同型である。また、 $\mathcal{H}_l(S)^M = \mathbb{C}x_1|_S$ 。

証明. (i) $\mathcal{H}_0(S) \simeq \mathcal{H}_0(X) = \mathbb{C}$ 。

(ii) $\mathcal{H}_l(S) = \mathcal{H}_l(X) = \mathbb{C}\text{-span} \{x_1, \dots, x_n\} \simeq (\mathbb{C}^n)^* \simeq \mathbb{C}^n$ 。この最後の同型は $K = SO(n)$ のベクトル表現が $\mathbb{R}$ 上定義されていることによる (補題 4.1 の証明から分かるように実はすべての $\mathcal{H}_l(S)$ が自己双対である)。第 2 の主張は M の定義 (1.6) から明らか。□

K は実半単純 Lie 群 $G := SO(n, 1)_0$ の極大コンパクト群なので、対称対 (G, K) の K タイプに対して [O1] で導入した single-

petaled と quasi-single-petaled という概念を $\hat{K}_M$ の要素に用いることができる。 (G, K) は階数 1 の対称対なので次を得る：

命題 3.5 ([O1, Corollary 2.9]). quasi-single-petaled であれば single-petaled. single-petaled な $\hat{K}_M$ の要素は $\mathcal{H}_0(S)$ と $\mathcal{H}_1(S)$ のみである。

4. 動径方向への制限

X 上の関数を $A = \{(r, 0, \dots, 0)\} \simeq \mathbb{R}$ へ制限する写像 γ_A の詳細を調べる。 X 上至るところ定義された関数 $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対する制限は

$$\gamma_A(\varphi)(r) = \varphi(r, 0, \dots, 0)$$

で定まる。一方、 $\varphi \in L^2(X)$ は Lebesgue 測度 0 の集合上での違いは無視して考えるため、Lebesgue 測度が 0 である A への制限は一般には定義できない。しかし、分解 (3.3) のいずれかの成分 $L_l^2(X)$ ($l \in \mathbb{N}$) に属する φ は、 $\mathcal{H}_l(S)$ の基底をなす S 上の解析関数 $v^{(1)}, \dots, v^{(d)}$ を用いて

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^d v^{(\nu)}\left(\frac{x}{|x|}\right) c_\nu(|x|), \quad c_1, \dots, c_d \in L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{n-1} dr)$$

の形に一意的に表せるので、その制限

$$\gamma_A(\varphi)(r) = \sum_{\nu=1}^d v^{(\nu)}\left(\frac{r}{|r|}, 0, \dots, 0\right) c_\nu(|r|)$$

を定めることができる。明らかに $\gamma_A(\varphi) \in L^2(A, |r|^{n-1} dr)$ であり、対応 $\gamma_A: L_l^2(X) \rightarrow L^2(A, |r|^{n-1} dr)$ は基底 $\{v^{(\nu)}\}$ の取り方に依らない有界線形写像となる。

$l \in \mathbb{N}$ とする。

補題 4.1. $d = \dim \mathcal{H}_l(S)$ とし、 $\mathcal{H}_l(S)$ の正規直交基底 $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(d)}\}$ を $v^{(1)} \in \mathcal{H}_l(S)^M$ となるように取ると、以下が成り立つ：

$$(4.1) \quad |v^{(1)}(\pm 1, 0, \dots, 0)| = \sqrt{\frac{d}{\Omega}},$$

$$(4.2) \quad v^{(1)}(-1, 0, \dots, 0) = (-1)^l v^{(1)}(1, 0, \dots, 0),$$

$$(4.3) \quad v^{(\nu)}(\pm 1, 0, \dots, 0) = 0 \quad (\nu = 2, \dots, d).$$

証明. 2 つの線形写像

$$\text{ev}_\pm: \mathcal{H}_l(S) \rightarrow \mathbb{C}; v \mapsto v(\pm 1, 0, \dots, 0)$$

はどちらも $(\mathcal{H}_l(S)^M)^M$ に属するので、(4.3) が成り立つ。また、 $v^{(1)} \in \mathcal{H}_l(S)$ は $X = \mathbb{R}^n$ 上の l 次同次多項式の S への制限なので (4.2) が成り立つ。最後に $\bar{\cdot}$ で複素数値関数を共役の値を取る関数にする操作を表すと、明らかに $\overline{\mathcal{H}_l(X)} = \mathcal{H}_l(X)$ なので、 $\overline{\mathcal{H}_l(S)} = \mathcal{H}_l(S)$ を得る。従って

$$\mathcal{H}_l(S) \times \mathcal{H}_l(S) \ni (v^*, v) \mapsto \int_S v^*(\omega) v(\omega) d\omega \in \mathbb{C}$$

が K 不変非退化双線形写像となり、 $\mathcal{H}_l(S) \simeq \mathcal{H}_l(S)^*$ であること、 $\{\overline{v^{(1)}}, \dots, \overline{v^{(d)}}\}$ が $\{v^{(1)}, \dots, v^{(d)}\}$ の双対基底であることが分かる。故に $\sum_{\nu=1}^d \overline{v^{(\nu)}} \otimes v^{(\nu)} \in \mathcal{H}_l(S) \otimes \mathcal{H}_l(S)$ は K 不変元で、その K 準同型

$$\mathcal{H}_l(S) \otimes \mathcal{H}_l(S) \ni v^* \otimes v \mapsto v^*(\omega) v(\omega) \in \{S \text{ 上の連続関数} \}$$

による像 $\sum_{\nu=1}^d |v^{(\nu)}(\omega)|^2$ は S 上の K 不変関数になる。従って、

$$\begin{aligned} d &= \sum_{\nu=1}^d \|v^{(\nu)}\|^2 = \int_S \sum_{\nu=1}^d |v^{(\nu)}(\omega)|^2 d\omega = \Omega \sum_{\nu=1}^d |v^{(\nu)}(1, 0, \dots, 0)|^2 \\ &= \Omega |v^{(1)}(1, 0, \dots, 0)|^2 \end{aligned} \quad (\because (4.3))$$

となり、(4.2) と併せて (4.1) を得る。 $\square$

命題 4.2. (i) W 加群 $\mathcal{H}_l(S)^M$ は l の偶奇に応じて自明表現 triv または符号表現 sgn と同型である。

(ii) $L_l^2(X)$ における $L_l^2(X)^M$ の直交補空間を $(L_l^2(X)^M)^\perp$ とすると

$$0 \rightarrow (L_l^2(X)^M)^\perp \rightarrow L_l^2(X) \xrightarrow{\gamma_A} \{f \in L^2(A, |r|^{n-1} dr) \mid \sigma f = (-1)^l f\} \rightarrow 0$$

は完全系列である。また、任意の $\varphi \in L_l^2(X)^M$ に対して

$$\|\gamma_A(\varphi)\| = \sqrt{\frac{2 \dim \mathcal{H}_l(S)}{\Omega}} \|\varphi\|$$

が成り立つ。

(iii) (1.8) はユニタリ変換である。

証明. (i) は命題 3.4 より。

(ii) は補題 4.1 の $\{v^{(\nu)}\}$ について

$$L_l^2(X)^M = v^{(1)} \otimes L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{n-1} dr), \quad (L_l^2(X)^M)^\perp = \bigoplus_{\nu=2}^d v^{(\nu)} \otimes L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{n-1} dr)$$

となるから、同補題より明らかである。

(iii) は (i)、(ii) と $v \in \mathcal{H}_l(S)^M$ に対して

$$\|v\|_W = \sqrt{\frac{2 \dim \mathcal{H}_l(S)}{\Omega}} \|v\|$$

が成り立つことより直ちに導かれる。 $\square$

注意 4.3. (iii) を (3.4) を使って示すこともできる。

さて、§1 では (1.10) が全射になるのが $l = 0, 1$ のときのみであるという事実を Helgason の結果 (1.11) によって説明した。しかし、(1.11) のような結果は本稿の $(G, K) = (SO(n, 1)_0, SO(n))$ など階数 1 の対称対についてしか知られていない。一方、対称対 (G, K) の制限ルート系に対する Weyl 群は本稿の有限群 $W = \{1, \sigma\}$ であるので、上の事実を命題 3.5 と “一般化された Chevalley 制限定理” ([O1, Theorem 1.3]) から導くことも可能である。この定理は対称対の階数に依らないので、本稿の議論を高階数の対称対に拡張する場合にも用いることができる。

5. 動径成分公式の証明

本節では、定理 2.4 と定理 2.5 の証明をする。

定理 2.4 の証明. Ψ_i^j, Ψ_j^k を定理のとおりとする。 $\{v_i^{(\mu)}\}$ を $v_i^{(1)} \in \mathcal{H}_i(S)^M$ であるような $\mathcal{H}_i(S)$ の正規直交基底とし、 $\{v_j^{(\nu)}\}$ を $v_j^{(1)} \in \mathcal{H}_j(S)^M$ であるような $\mathcal{H}_j(S)$ の正規直交基底とし、 $v_k^{(1)} \in \mathcal{H}_k(S)^M \setminus \{0\}$ とする。

$$(5.1) \quad \Psi_i^j[1 \otimes v_j^{(\nu)}] = \sum_{\mu} p_{(\mu)}^{(\nu)}(\partial_1, \dots, \partial_n) \otimes v_i^{(\mu)} \quad (\nu = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_j(S)),$$

$$(5.2) \quad \Psi_j^k[1 \otimes v_k^{(1)}] = \sum_{\nu} q_{(\nu)}(\partial_1, \dots, \partial_n) \otimes v_j^{(\nu)}$$

を満たす多項式 $\{p_{(\mu)}^{(\nu)}\} \cup \{q_{(\nu)}\} \subset \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ を定めると

$$(\Psi_i^j \circ \Psi_j^k)[1 \otimes v_k^{(1)}] = \sum_{\mu} \left(\sum_{\nu} q_{(\nu)}(\partial_1, \dots, \partial_n) p_{(\mu)}^{(\nu)}(\partial_1, \dots, \partial_n) \right) \otimes v_i^{(\mu)}$$

より

$$(5.3) \quad \Gamma_i^k(\Psi_i^j \circ \Psi_j^k)[1 \otimes v_k^{(1)}] = \left(\sum_{\nu} q_{(\nu)}(\mathcal{D}_r, 0, \dots, 0) p_{(1)}^{(\nu)}(\mathcal{D}_r, 0, \dots, 0) \right) \otimes v_i^{(1)}$$

である。さて、線形写像

$$\Upsilon : \mathcal{S}(X_{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{H}_j(S) \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{D}_r] \otimes \mathcal{H}_j(S); \\ q(\partial_1, \dots, \partial_n) \otimes v_j \mapsto q(\mathcal{D}_r, 0, \dots, 0) \otimes v_j$$

は $\mathbb{C}[\mathcal{D}_r]$ を自明な M 加群と見なすと M 準同型であり、 M 加群 $\mathbb{C}[\mathcal{D}_r] \otimes \mathcal{H}_j(S)$ は

$$\mathbb{C}[\mathcal{D}_r] \otimes \mathcal{H}_j(S) = \mathbb{C}[\mathcal{D}_r] \otimes v_j^{(1)} \oplus \sum_{\nu \geq 2} \mathbb{C}[\mathcal{D}_r] \otimes v_j^{(\nu)}$$

のように自明な M 加群に対する等質成分と他の等質成分の和へ分解される。従って (5.2) に Υ を施して

$$(5.4) \quad \begin{aligned} (\mathbb{C}[\mathcal{D}_r] \otimes \mathcal{H}_j(S))^M \ni (\Upsilon \circ \Psi_j^k)[1 \otimes v_k^{(1)}] &= \\ \sum_{\nu} q_{(\nu)}(\mathcal{D}_r, 0, \dots, 0) \otimes v_j^{(\nu)} &\in \mathbb{C}[\mathcal{D}_r] \otimes v_j^{(1)}, \\ \therefore q_{(\nu)}(\mathcal{D}_r, 0, \dots, 0) &= 0 \quad (\forall \nu \geq 2) \end{aligned}$$

を得る。よって (5.3) は

$$\begin{aligned} \Gamma_i^k(\Psi_i^j \circ \Psi_j^k)[1 \otimes v_k^{(1)}] &= q_{(1)}(\mathcal{D}_r, 0, \dots, 0) p_{(1)}^{(1)}(\mathcal{D}_r, 0, \dots, 0) \otimes v_i^{(1)} \\ &= \Gamma_i^j(\Psi_i^j)[q_{(1)}(\mathcal{D}_r, 0, \dots, 0) \otimes v_j^{(1)}] \\ &= \Gamma_i^j(\Psi_i^j)[\Gamma_j^k(\Psi_j^k)[1 \otimes v_k^{(1)}]] \\ &= (\Gamma_i^j(\Psi_i^j) \circ \Gamma_j^k(\Psi_j^k))[1 \otimes v_k^{(1)}] \end{aligned}$$

となり、定理 2.4 が証明された。 $\square$

定理 2.5 は、[O2, §3] で実半単純 Lie 群の Cartan 運動群に対して一般化した動径成分公式を $G = SO(n, 1)_0$ の場合にさらに一般化するものであるが、その証明はやはり [O2, §3] の議論で鍵となった次の 2 つの補題に基づく。

補題 5.1 ([Hec, Je]). $k = 0, 1, 2, \dots$ とし、 $\widehat{r}^k$ で $C_c^\infty(A) \curvearrowright r^k$ を掛け算する作用素を表す。このとき

$$\frac{1}{k!} \left(\text{ad} \frac{(\mathcal{D}_r)^2}{2} \right)^k \widehat{r}^k = (\mathcal{D}_r)^k$$

が成り立つ。ただし、一般に作用素 p, q に対して $\text{ad}(p)q = [p, q] = pq - qp$ である。

補題 5.2. $k = 0, 1, 2, \dots$ とし、 $p(\partial_1, \dots, \partial_n) \in \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ を k 次同次多項式とする。 $\widehat{p}$ で $C_c^\infty(X)$ へ多項式関数 $p(x_1, \dots, x_n)$ を掛け算する作用素を表す。このとき

$$\frac{1}{k!} \left(\text{ad} \frac{\Delta}{2} \right)^k \widehat{p} = p(\partial_1, \dots, \partial_n)$$

が成り立つ。ここで、右辺は記号どおりの微分作用素とする。

後者は初等的な計算で示される。

定理 2.5 の証明. Φ^i, Ψ_j^i を定理の通りとし、 $\{v_i^{(\mu)}\}, \{v_j^{(\nu)}\}, \{p_{\omega}^{(\nu)}\}$ は定理 2.4 の証明のとおりとする。従って (5.1) が成立している。 Ψ_j^i の k 次同次成分 ($k = 0, 1, 2, \dots$) を

$$\mathcal{S}(X_{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{H}_j(S) \ni \sum_{\nu} f_{(\nu)}(\partial_1, \dots, \partial_n) \otimes v_j^{(\nu)} \mapsto$$

$$\sum_{\mu, \nu} f_{(\nu)}(\partial_1, \dots, \partial_n) \left(p_{(\mu)}^{(\nu)}(\partial_1, \dots, \partial_n) \text{ の } k \text{ 次同次成分} \right) \otimes v_i^{(\mu)} \in \mathcal{S}(X_{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{H}_i(S)$$

により定めると、 Ψ_j^i はこれら同次成分の有限個の和に分解し、各成分は (X, K) 加群の準同型になっている。従って Ψ_j^i は最初からある $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して k 次同次であると仮定しても一般性を失わない。すると、補題 5.2 より $\nu = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_j(S)$ に対して

$$\begin{aligned} (\Phi^i \circ \Psi_j^i)[v_j^{(\nu)}] &= \sum_{\mu} p_{(\mu)}^{(\nu)}(\partial_1, \dots, \partial_n) \Phi^i[v_i^{(\mu)}] \\ &= \sum_{\mu} \left(\frac{1}{k!} \left(\text{ad} \frac{\Delta}{2} \right)^k \widehat{p_{(\mu)}^{(\nu)}} \right) \Phi^i[v_i^{(\mu)}] \\ &= \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^{k-s}}{s!(k-s)!} \left(\frac{\Delta}{2} \right)^s \sum_{\mu} \widehat{p_{(\mu)}^{(\nu)}} \left(\frac{\Delta}{2} \right)^{k-s} \Phi^i[v_i^{(\mu)}] \end{aligned}$$

となる。明らかに $(\Delta/2)^{k-s} \circ \Phi^i \in \text{Hom}_K(\mathcal{H}_i(S), C_c^\infty(A))$ ($s = 0, \dots, k$)。また、線形写像 $L_s \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_j(S), C_c^\infty(A))$ ($s = 0, \dots, k$) を

$$L_s[v_j^{(\nu)}] = \sum_{\mu} \widehat{p_{(\mu)}^{(\nu)}} \left(\frac{\Delta}{2} \right)^{k-s} \Phi^i[v_i^{(\mu)}] \quad (\nu = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_j(S))$$

により定めると K 準同型になる。これは、 L_s が 3 つの K 準同型の合成

$$\mathcal{H}_j(S) \xrightarrow{\Psi_j^i[1 \otimes \cdot]} \mathcal{S}(X_{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{H}_i(S) \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \otimes C_c^\infty(A) \xrightarrow{\text{掛け算}} C_c^\infty(A) \\ p(\partial_1, \dots, \partial_n) \otimes v_i \mapsto p(x_1, \dots, x_n) \otimes \left(\frac{\Delta}{2} \right)^{k-s} \Phi^i[v_i]$$

に等しいことによる。さて、 $s = 0, \dots, k$ に対して

$$\Gamma_A^j(L_s)[v_j^{(1)}] = \sum_{\mu} p_{(\mu)}^{(1)}(r, 0, \dots, 0) \hat{\gamma}_A \left(\left(\frac{\Delta}{2} \right)^{k-s} \Phi^i[v_i^{(\mu)}] \right)$$

であるが、定理 2.4 の証明で (5.4) を得たのと同じ方法で

$$p_{(\mu)}^{(1)}(r, 0, \dots, 0) = 0 \quad (\mu \geq 2)$$

が得られるので、

$$\begin{aligned} \Gamma_A^j(L_s)[v_j^{(1)}] &= p_{(1)}^{(1)}(r, 0, \dots, 0) \hat{\gamma}_A \left(\left(\frac{\Delta}{2} \right)^{k-s} \Phi^i[v_i^{(1)}] \right) \\ &= p_{(1)}^{(1)}(r, 0, \dots, 0) \hat{\gamma}_A \left(\left(\frac{\Delta}{2} \right)^{k-s} \circ \Phi^i \right) [v_i^{(1)}] \\ &= p_{(1)}^{(1)}(r, 0, \dots, 0) \hat{\gamma}_A \left(\left(\frac{\mathcal{D}_r}{2} \right)^{k-s} \Gamma_A^i(\Phi^i)[v_i^{(1)}] \right) \quad (\because (1.14)) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $p_{(1)}^{(1)}(r, 0, \dots, 0)$ は r^* の定数倍であることに注意しよう。これらと

$$\Phi^i \circ \Psi_i^j = \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^{k-s}}{s!(k-s)!} \left(\frac{\Delta}{2} \right)^s \circ L_s$$

より、

$$\begin{aligned} \Gamma_A^j(\Phi^i \circ \Psi_i^j)[v_j^{(1)}] &= \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^{k-s}}{s!(k-s)!} \left(\frac{\mathcal{D}_r}{2} \right)^s \Gamma_A^j(L_s)[v_j^{(1)}] \quad (\because (1.14)) \\ &= \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^{k-s}}{s!(k-s)!} \left(\frac{\mathcal{D}_r}{2} \right)^s p_{(1)}^{(1)}(r, 0, \dots, 0) \hat{\gamma}_A \left(\left(\frac{\mathcal{D}_r}{2} \right)^{k-s} \Gamma_A^i(\Phi^i)[v_i^{(1)}] \right) \\ &= \left(\frac{1}{k!} \left(\text{ad} \left(\frac{\mathcal{D}_r}{2} \right)^2 \right)^k p_{(1)}^{(1)}(r, 0, \dots, 0) \hat{\gamma}_A \right) \Gamma_A^i(\Phi^i)[v_i^{(1)}] \\ &= p_{(1)}^{(1)}(\mathcal{D}_r, 0, \dots, 0) \Gamma_A^i(\Phi^i)[v_i^{(1)}] \quad (\because \text{補題 5.1}) \\ &= \Gamma_A^i(\Phi^i)[p_{(1)}^{(1)}(\mathcal{D}_r, 0, \dots, 0) \circ v_i^{(1)}] \\ &= \Gamma_A^i(\Phi^i) [\Gamma_i^j(\Psi_i^j)[1 \otimes v_j^{(1)}]] \\ &= (\Gamma_A^i(\Phi^i) \circ \Gamma_i^j(\Psi_i^j)) [1 \otimes v_j^{(1)}] \end{aligned}$$

が成り立ち、 $\Gamma_A^j(\Phi^i \circ \Psi_i^j) = \Gamma_A^i(\Phi^i) \circ \Gamma_i^j(\Psi_i^j)$ を得る。 $\square$

注意 5.3. $G = SO(n, 1)$ 以外の一般の実半単純 Lie 群の Cartan 運動群に対しても、定義 2.1 の “一般化された Harish-Chandra 写像” を然るべく定式化すると、定理 2.4、定理 2.5 のような “一般化された動径成分公式” を本節と同じ方法で証明することができる。

6. 自己共役作用素

行列環 M に対合 $\cdot^*: M \rightarrow M$ を定めるために、一般に

$$\Psi_i^j \in \text{Hom}_K(\mathcal{H}_j(S), \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_i(S)) = \text{Hom}_{X,K}(\mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_j(S), \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_i(S))$$

($i, j \in \mathbb{N}$) に

$$(\Psi_i^j)^* \in \text{Hom}_K(\mathcal{H}_i(S), \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_j(S)) = \text{Hom}_{X,K}(\mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_i(S), \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_j(S))$$

を対応させる複素反線形写像 $\Psi_i^j \mapsto (\Psi_i^j)^*$ を定義しよう。

$\{v_i^{(\mu)}\}$ 、 $\{v_j^{(\nu)}\}$ をそれぞれ $\mathcal{H}_i(S)$ 、 $\mathcal{H}_j(S)$ の正規直交基底とし、

$$\Psi_i^j[v_j^{(\nu)}] = \sum_{\mu} p_{(\mu)}^{(\nu)}(\partial_1, \dots, \partial_n) \otimes v_i^{(\mu)} \quad (\nu = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_j(S))$$

とする。各多項式 $p_{(\mu)}^{(\nu)}(\partial_1, \dots, \partial_n) \in \mathcal{S}(X_C) = \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ に対して $\overline{p_{(\mu)}^{(\nu)}}(\partial_1, \dots, \partial_n)$ で、多項式中のすべての係数を複素共役にした多項式を表すことにすると、 $(\Psi_i^j)^* \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_i(S), \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_j(S))$ で

$$(\Psi_i^j)^*[v_i^{(\mu)}] = \frac{\dim \mathcal{H}_i(S)}{\dim \mathcal{H}_j(S)} \sum_{\nu} \overline{p_{(\mu)}^{(\nu)}}(-\partial_1, \dots, -\partial_n) \otimes v_j^{(\nu)} \quad (\mu = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_i(S))$$

を満たすものが唯一ある。 $(\Psi_i^j)^*$ が基底の取り方に依らずに定まることは直ちに確かめられる。

補題 6.1. $(\Psi_i^j)^*$ は K 準同型。

証明. $(\cdot, \cdot)$ を $\mathcal{H}_j(X)$ 上の K 不変 Hermite 内積とする。補題 4.1 の証明で用いた反線形写像 $\bar{\cdot}: \mathcal{H}_j(X) \rightarrow \mathcal{H}_j(X)$ は K の作用と可換であり、 $\mathcal{H}_j(X)$ 上の K 不変双線形形式 $(\bar{\cdot}, \cdot)$ を定める。 $(\bar{\cdot}, \cdot)$ により $\mathcal{H}_j(X)$ は自己双対になるが、 $\{v_j^{(\nu)}\}$ の双対基底が $\{\overline{v_j^{(\nu)}}\}$ である。従って Ψ_i^j が K 準同型であることより

$$\sum_{\nu} \overline{v_j^{(\nu)}} \otimes \Psi_i^j[v_j^{(\nu)}] = \sum_{\mu, \nu} \overline{v_j^{(\nu)}} \otimes p_{(\mu)}^{(\nu)}(\partial_1, \dots, \partial_n) \otimes v_i^{(\mu)} \in \mathcal{H}_j(S) \otimes \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_i(S)$$

は K 不変である。この要素に K の作用と可換な反線形写像

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_j(S) \otimes \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_i(S) &\ni v_j \otimes p(\partial_1, \dots, \partial_n) \otimes v_i \\ &\mapsto \overline{v_i} \otimes \overline{p}(-\partial_1, \dots, -\partial_n) \otimes \overline{v_j} \in \mathcal{H}_i(S) \otimes \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_j(S) \end{aligned}$$

を施すと $\mathcal{H}_i(S) \otimes \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_j(S)$ の K 不変な要素

$$\sum_{\mu, \nu} \overline{v_i^{(\mu)}} \otimes \overline{p_{(\mu)}^{(\nu)}}(-\partial_1, \dots, -\partial_n) \otimes v_j^{(\nu)} = \frac{\dim \mathcal{H}_j(S)}{\dim \mathcal{H}_i(S)} \sum_{\mu} \overline{v_i^{(\mu)}} \otimes (\Psi_i^j)^*[v_i^{(\mu)}]$$

が得られるが、この要素の K 不変性は補題の主張と同値である。 $\square$

次の性質は定義から容易に確かめられる：

命題 6.2. $(\Psi_i^j)^{**} = \Psi_i^j$ 。 $\Psi_i^k \in \text{Hom}_{X,K}(\mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_k(S), \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_i(S))$ ($k \in \mathbb{N}$) に対して $(\Psi_i^j \circ \Psi_j^k)^* = (\Psi_j^k)^* \circ (\Psi_i^j)^*$ 。

注意 6.3. この反線形写像 $\Psi_i^j \mapsto (\Psi_i^j)^*$ は、[O2, §10] で実半単純 Lie 群 $G = SO(n, 1)_0$ に対して定めた反線形写像の Cartan 運動群 $K \ltimes X$ の場合における類似物である。

系 6.4. 行列環 M は対合

$$\begin{pmatrix} \Psi_0^0 & \Psi_1^0 \\ \Psi_0^1 & \Psi_1^1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} (\Psi_0^0)^* & (\Psi_1^0)^* \\ (\Psi_0^1)^* & (\Psi_1^1)^* \end{pmatrix}$$

を持つ。

定理 6.5. M の要素 $D = \begin{pmatrix} \Psi_0^0 & \Psi_0^1 \\ \Psi_1^0 & \Psi_1^1 \end{pmatrix}$ が $D^* = D$ を満たすとする。
すなわち

$$(\Psi_i^j)^* = \Psi_j^i \quad (\forall i, j \in \{0, 1\}).$$

すると D は $\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X))$ で定義された $\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X))$ 上の対称作用素 H_D を定める。

証明. $i, j \in \{0, 1\}$ とする。 $\{v_i^{(\nu)}\}$, $\{v_j^{(\nu)}\}$, $\{p_{(\mu)}^{(\nu)}\}$ を前と同じように取る。 $\Phi^j \in \text{Hom}_K(\mathcal{H}_j(S), C_c^\infty(X))$, $\Phi^i \in \text{Hom}_K(\mathcal{H}_i(S), C_c^\infty(X))$ に対して

$$\begin{aligned} & \langle \Phi^j, \Phi^i \circ \Psi_j^i \rangle \\ &= \frac{1}{\dim \mathcal{H}_j(S)} \sum_{\nu} \int_X \overline{\langle \Phi^j[v_j^{(\nu)}](x) | \Phi^i \circ \Psi_j^i[v_j^{(\nu)}](x) \rangle} dx \\ &= \frac{1}{\dim \mathcal{H}_j(S)} \sum_{\nu} \int_X \overline{\langle \Phi^j[v_j^{(\nu)}](x) | \sum_{\mu} p_{(\mu)}^{(\nu)}(\partial_1, \dots, \partial_n) \Phi^i[v_i^{(\mu)}](x) \rangle} dx \\ &= \frac{1}{\dim \mathcal{H}_j(S)} \sum_{\mu, \nu} \int_X \overline{\langle p_{(\mu)}^{(\nu)}(-\partial_1, \dots, -\partial_n) \Phi^j[v_j^{(\nu)}](x) | \Phi^i[v_i^{(\mu)}](x) \rangle} dx \\ &= \frac{1}{\dim \mathcal{H}_i(S)} \sum_{\mu} \int_X \overline{\langle \Phi^j \circ (\Psi_i^j)^* [v_i^{(\mu)}](x) | \Phi^i[v_i^{(\mu)}](x) \rangle} dx \\ &= \langle \Phi^j \circ (\Psi_i^j)^*, \Phi^i \rangle = \langle \Phi^j \circ \Psi_j^i, \Phi^i \rangle \end{aligned}$$

となるが、これは D の対称性を示す。 $\square$

この定理の H_D が本質的の自己共役作用素であることを示すために少し準備をする。 $\mathcal{S}(X)$ で $X = \mathbb{R}^n$ 上の急減少関数の空間、 $\mathcal{S}'(X)$ で X 上の緩増加超関数の空間を表す。 $\mathcal{S}(X)$, $\mathcal{S}'(X)$ には X や K が作用し、 (X, K) 加群として $C_c^\infty(X) \subset \mathcal{S}(X) \subset L^2(X) \subset \mathcal{S}'(X)$ である。従って

$$\begin{aligned} \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X)) &\subset \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), \mathcal{S}(X)) \\ &\subset \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X)) \subset \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), \mathcal{S}'(X)) \end{aligned}$$

であり、3 番目の空間以外は M の右からの作用について閉じている。 X の双対ベクトル空間 X^* に対する各種関数空間も同様に定義する。 Fourier 変換 F は X 上の関数 $\varphi(x)$ を X^* 上の関数

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_X f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx$$

に写すが、特に $F: L^2(X) \xrightarrow{\sim} L^2(X^*)$ はユニタリ変換である。

補題 6.6. $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{S}(X) \times \mathcal{S}'(X) \rightarrow \mathbb{C}$ を標準的な双線形写像とする。 1 次半形式

$$\mathcal{S}(\cdot, \cdot)_{\mathcal{S}'}: \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), \mathcal{S}(X)) \times \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), \mathcal{S}'(X)) \rightarrow \mathbb{C}$$

を $\mathcal{H}_l(S)$ ($l = 0, 1$) の正規直交基底 $\{v_l^{(\nu)}\}$ を用いて

$$\mathcal{S}(\langle \Phi^0, \Phi^1 \rangle, \langle \Phi^0, \Phi^1 \rangle)_{\mathcal{S}'} = \langle \Phi^0[v_0^{(1)}], \Phi^0[v_0^{(1)}] \rangle + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \langle \Phi^1[v_1^{(\nu)}], \Phi^1[v_1^{(\nu)}] \rangle$$

と定義する。このとき、

(i) 任意の $D \in M$ に対して $\mathcal{S}(\cdot, \cdot)_D = \mathcal{S}(\cdot, D^*, \cdot)$ である。

(ii) $\Phi \in \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), \mathcal{S}'(X))$ が

$$\mathcal{S}(\langle \Phi, \Phi \rangle)_{\mathcal{S}'} = 0 \quad (\forall \Phi \in \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X)))$$

を満たすとき $\Phi = 0$ 。

証明. (i) は定理 6.5 の証明と同様。 (ii) を示すために $\Phi = (\Phi^0, \Phi^1)$ が仮定を満たすとする。 任意の $F^l \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X))$ ($l = 0, 1$) に対して

$$(6.1) \quad \langle F^0[v_0^{(1)}], \Phi^0[v_0^{(1)}] \rangle + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \langle F^1[v_1^{(\nu)}], \Phi^1[v_1^{(\nu)}] \rangle = 0$$

がいえれば十分である。 各 $l = 0, 1$ について Φ^l と $\sum_{\nu} \overline{v_l^{(\nu)}} \otimes v_l^{(\nu)} \in \mathcal{H}_l(S)^{\otimes 2}$ と $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の K 不変性により

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \langle F^l[v_l^{(\nu)}], \Phi^l[v_l^{(\nu)}] \rangle &= \sum_{\nu} \langle \overline{F^l[kv_l^{(\nu)}]}, \Phi^l[kv_l^{(\nu)}] \rangle \\ &= \sum_{\nu} \langle \overline{F^l[kv_l^{(\nu)}]}, k\Phi^l[v_l^{(\nu)}] \rangle \\ &= \sum_{\nu} \langle \overline{k^{-1}F^l[kv_l^{(\nu)}]}, \Phi^l[v_l^{(\nu)}] \rangle \quad (\forall k \in K) \end{aligned}$$

が成り立つ。 各 l , 任意の $v_l \in \mathcal{H}_l(S)$ に対して

$$\langle \Phi^l[v_l](x) := \int_K F^l[kv_l](kx) dk \in C_c^\infty(X)$$

(dk は $\int_K dk = 1$ である K の Haar 測度) は $C_c^\infty(X)$ に値を取る Riemann 式積分 $\int_K k^{-1}F^l[kv_l] dk$ と一致する。 よって

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \langle \overline{F^l[v_l^{(\nu)}]}, \Phi^l[v_l^{(\nu)}] \rangle &= \int_K \sum_{\nu} \langle \overline{k^{-1}F^l[kv_l^{(\nu)}]}, \Phi^l[v_l^{(\nu)}] \rangle dk \\ &= \sum_{\nu} \langle \overline{\langle \Phi^l[v_l^{(\nu)}] \rangle}, \Phi^l[v_l^{(\nu)}] \rangle. \end{aligned}$$

ここで明らかに $\langle \Phi := (\Phi^0, \Phi^1) \rangle \in \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X))$ なので (6.1) が従う。 $\square$

定理 6.7. D を定理 6.5 のとおりとする。 H_D は $\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^\infty(X))$ をコアに持つ本質的の自己共役作用素である。 その自己共役な拡張 $\bar{H}_D$ の定義域は

$$(6.2) \quad \mathcal{D}(\bar{H}_D) = \left\{ (\Phi^0, \Phi^1) \in \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X)) \mid \langle \Phi^0, \Phi^1 \rangle D \in \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X)) \right\}$$

である。 ただし、この定義において (Φ^0, Φ^1) は $\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), \mathcal{S}'(X))$ の要素として D の作用を受けている。

証明. 補題 6.6 の 1 次半形式 $\mathcal{S}(\cdot, \cdot)_{\mathcal{S}}$ の

$$\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), \mathcal{S}(X)) \times \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X))$$

への制限が $\bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), L^2(X))$ の内積と一致することに注意する。よって同補題から、 H_D の随伴作用素 H_D^* は D の $\text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), \mathcal{S}'(X))$ への作用を制限したものであり、その定義域 $\mathcal{D}(H_D^*)$ が (6.2) の右辺であることが分かる。 H_D^* が対称作用素であることを示せば $\bar{H}_D = H_D^* = H_D^*$ となり証明が完了する。よって任意の $(\Phi^0, \Phi^1), (\Phi^0, \Phi^1) \in \mathcal{D}(H_D^*)$ に対して

$$(6.3) \quad ((\Phi^0, \Phi^1), (\Phi^0, \Phi^1)D) = ((\Phi^0, \Phi^1)D, (\Phi^0, \Phi^1))$$

を示そう。各 $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ に対して

$$\Psi_i^j[v_j^{(\nu)}] = \sum_{\mu} p_{i,(\mu)}^{j,(\nu)}(\partial_1, \dots, \partial_n) \otimes v_i^{(\mu)} \quad (\nu = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_j(S))$$

となるよう $\{p_{i,(\mu)}^{j,(\nu)}\} \subset \mathcal{S}(X_C)$ を取り、 $(\bar{\Phi}^0, \bar{\Phi}^1) := (\Phi^0, \Phi^1)D$ と置く。各 $j = 0, 1$ 、各 $\nu = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_j(S)$ に対して

$$\mathcal{F} \circ \bar{\Phi}^j[v_j^{(\nu)}] = \sum_{i=0,1} \sum_{\mu} p_{i,(\mu)}^{j,(\nu)}(i\xi_1, \dots, i\xi_n) \widehat{\mathcal{F} \circ \Phi^i[v_i^{(\mu)}]} \in L^2(X^*)$$

であるから、(6.3) の左辺は

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0,1} \frac{1}{\dim \mathcal{H}_j(S)} \sum_{\nu=1}^{\dim \mathcal{H}_j(S)} (\mathcal{F} \circ \bar{\Phi}^j[v_j^{(\nu)}], \mathcal{F} \circ \bar{\Phi}^j[v_j^{(\nu)}]) \\ &= \sum_{j=0,1} \frac{1}{\dim \mathcal{H}_j(S)} \sum_{\nu=1}^{\dim \mathcal{H}_j(S)} \int_{X^*} \overline{(\mathcal{F} \circ \bar{\Phi}^j[v_j^{(\nu)}])(\xi)} \times \\ & \quad \times \sum_{i=0,1} \sum_{\mu=1}^{\dim \mathcal{H}_i(S)} p_{i,(\mu)}^{j,(\nu)}(i\xi_1, \dots, i\xi_n) \widehat{(\mathcal{F} \circ \Phi^i[v_i^{(\mu)}])(\xi)} d\xi \\ &= \int_{X^*} \sum_{i=0,1} \frac{1}{\dim \mathcal{H}_i(S)} \times \\ & \quad \times \sum_{\mu=1}^{\dim \mathcal{H}_i(S)} \sum_{j=0,1} \sum_{\nu=1}^{\dim \mathcal{H}_j(S)} \frac{\dim \mathcal{H}_i(S)}{\dim \mathcal{H}_j(S)} \overline{p_{i,(\mu)}^{j,(\nu)}(-i\xi_1, \dots, -i\xi_n)} \widehat{(\mathcal{F} \circ \bar{\Phi}^j[v_j^{(\nu)}])(\xi)} \times \\ & \quad \times (\mathcal{F} \circ \Phi^i[v_i^{(\mu)}])(\xi) d\xi \end{aligned}$$

となるが、同様の計算と $D^* = D$ によりこれは (6.3) の右辺に等しい。□

7. 行列環 M の構造

$\text{Hom}_{X,K}(\mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_j(S), \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_i(S))$ ($i, j \in \{0, 1\}$) や (2.2) の行列環 M の具体的な構造を調べる。まず、[KR] より変数分離：

$$(7.1) \quad \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^K \otimes \mathcal{H}(X) = \mathbb{C}[|x|^2] \otimes \mathcal{H}(X)$$

が成り立つ。 K の作用と両立する環同型

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \ni f(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(\partial_1, \dots, \partial_n) \in \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n] = \mathcal{S}(X_C)$$

による $\mathcal{H}(X)$ と $\mathcal{H}_l(X)$ ($l \in \mathbb{N}$) の像をそれぞれ $\mathcal{H}(X^*)$ 、 $\mathcal{H}_l(X^*)$ と

書くと、(7.1) と命題 3.1 (i) より

$$\mathcal{S}(X_C) = \mathbb{C}[\Delta] \otimes \mathcal{H}(X^*) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathbb{C}[\Delta] \otimes \mathcal{H}_l(X^*)$$

を得る。最右辺は K 加群 $\mathcal{S}(X_C)$ の等質成分への分解を与えている。従って

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{X,K}(\mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_j(S), \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_i(S)) \\ & \simeq \text{Hom}_K(\mathcal{H}_j(S), \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_i(S)) \quad (\cdot: \text{Frobenius 相互律}) \\ & \simeq \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathbb{C}[\Delta] \otimes \text{Hom}_K(\mathcal{H}_j(S), \mathcal{H}_l(X^*) \otimes \mathcal{H}_i(S)) \end{aligned}$$

となる。ここで $\mathcal{H}_i(S)$ が自己双対であること (補題 4.1 の証明参照)、 $\mathcal{H}_i(X^*) \simeq \mathcal{H}_i(X) \simeq \mathcal{H}_i(S)$ により複素線形空間として

$$\begin{aligned} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_j(S), \mathcal{H}_l(X^*) \otimes \mathcal{H}_i(S)) & \simeq \text{Hom}_K(\mathcal{H}_j(S) \otimes \mathcal{H}_i(S)^*, \mathcal{H}_l(X^*)) \\ & \simeq \text{Hom}_K(\mathcal{H}_j(S) \otimes \mathcal{H}_i(S), \mathcal{H}_l(S)) \end{aligned}$$

であり、この空間の次元は Schur の補題によって K 加群 $\mathcal{H}_j(S) \otimes \mathcal{H}_i(S)$ に現れる $\mathcal{H}_l(S) \in \hat{K}$ の重複度に一致する。さて、命題 3.4 より

$$\mathcal{H}_0(S) \otimes \mathcal{H}_0(S) \simeq \mathcal{H}_0(S), \quad \mathcal{H}_0(S) \otimes \mathcal{H}_1(S) \simeq \mathcal{H}_1(S) \otimes \mathcal{H}_0(S) \simeq \mathcal{H}_1(S),$$

[GW, §10.2.1] より

$$\mathcal{H}_1(S) \otimes \mathcal{H}_1(S) \simeq \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \simeq \mathcal{H}_0(S) \oplus \mathcal{H}_2(S) \oplus \bigwedge^2 \mathbb{C}^n$$

という既約 K 加群への分解が成り立ち、さらに

$$\bigwedge^2 \mathbb{C}^n \simeq \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \begin{cases} \simeq \mathbb{C}^3 \simeq \mathcal{H}_1(S) & (n = 3 \text{ のとき}), \\ \notin \hat{K}_M & (n > 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

がよく知られている。故に、

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_K(\mathcal{H}_0(S), \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_0(S)) \\ &= \mathbb{C}[\Delta] \otimes \text{Hom}_K(\mathcal{H}_0(S), \mathcal{H}_0(X^*) \otimes \mathcal{H}_0(S)) \\ &= \mathbb{C}[\Delta] \left(\bar{\Psi}_0^0 : \mathcal{H}_0(S) \ni c \mapsto 1 \otimes c \in \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_0(S) \right), \\ & \text{Hom}_K(\mathcal{H}_0(S), \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_1(S)) \\ &= \mathbb{C}[\Delta] \otimes \text{Hom}_K(\mathcal{H}_0(S), \mathcal{H}_1(X^*) \otimes \mathcal{H}_1(S)) \\ &= \mathbb{C}[\Delta] \left(\bar{\Psi}_1^0 : \mathcal{H}_0(S) \ni c \mapsto c \sum_{\nu=1}^n \partial_{\nu} \otimes x_{\nu}|_S \in \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_1(S) \right), \\ & \text{Hom}_K(\mathcal{H}_1(S), \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_0(S)) \\ &= \mathbb{C}[\Delta] \otimes \text{Hom}_K(\mathcal{H}_1(S), \mathcal{H}_1(X^*) \otimes \mathcal{H}_0(S)) \\ &= \mathbb{C}[\Delta] \left(\bar{\Psi}_0^1 : \mathcal{H}_1(S) \ni \sum_{\nu=1}^n c_{\nu} x_{\nu}|_S \mapsto \sum_{\nu=1}^n c_{\nu} \partial_{\nu} \otimes 1 \in \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_0(S) \right), \\ & \text{Hom}_K(\mathcal{H}_1(S), \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_1(S)) \\ &= \mathbb{C}[\Delta] \otimes \text{Hom}_K(\mathcal{H}_1(S), \mathcal{H}_0(X^*) \otimes \mathcal{H}_1(S)) \\ & \quad \oplus \mathbb{C}[\Delta] \otimes \text{Hom}_K(\mathcal{H}_1(S), \mathcal{H}_1(X^*) \otimes \mathcal{H}_1(S)) \\ & \quad \oplus \mathbb{C}[\Delta] \otimes \text{Hom}_K(\mathcal{H}_1(S), \mathcal{H}_2(X^*) \otimes \mathcal{H}_1(S)) \\ &= \mathbb{C}[\Delta] \left(\bar{\Psi}_1^1 : \mathcal{H}_1(S) \ni v \mapsto 1 \otimes v \in \mathcal{S}(X_C) \otimes \mathcal{H}_1(S) \right) \oplus \mathbb{C}[\Delta] \bar{\Psi}_1^1 \\ & \quad \oplus \mathbb{C}[\Delta] \left(\bar{\Psi}_1^1 : \mathcal{H}_1(S) \ni \sum_{\nu=1}^n c_{\nu} x_{\nu}|_S \mapsto \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{\nu=1}^n c_{\nu} \left(\partial_{\nu} \sum_{\mu=1}^n \partial_{\mu} \otimes x_{\mu}|_S - \frac{\Delta}{n} \otimes x_{\nu}|_S \right) \in \mathcal{S}(X_{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{H}_1(S),$$

が分かる。ただし、 $\Psi_1^1 \in \text{Hom}_K(\mathcal{H}_1(S), \mathcal{S}(X_{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{H}_1(S))$ は $n > 3$ のときは 0 で、 $n = 3$ のときは

$$\Psi_1^1[x_{\nu}|_S] = \partial_{\nu+1} \otimes x_{\nu+2}|_S - \partial_{\nu+2} \otimes x_{\nu+1}|_S \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

で定まるものとする (ここで $x_{\nu+3} := x_{\nu}$, $\partial_{\nu+3} := \partial_{\nu}$ ($\nu = 1, 2$)).
 以上の具体的表示より次を得る:

定理 7.1. M は

$$(7.2) \quad D = \begin{pmatrix} f_0^0(\Delta) \times \cdot & f_1^1(\Delta) \tilde{\Psi}_0^1 \\ f_1^0(\Delta) \tilde{\Psi}_1^0 & f_1^1(\Delta) \times \cdot + f_1^1(\Delta) \Psi_1^1 + f_1^1(\Delta) \Psi_1^1 \end{pmatrix},$$

$$f_i^j, \Psi_i^1, \Psi_1^1 \in \mathbb{C}[\Delta]$$

という形の行列からなる環である。この行列 D に対合を施すと

$$D^* = \begin{pmatrix} \overline{f_0^0(\Delta)} \times \cdot & -\overline{f_1^0(\Delta)} \tilde{\Psi}_0^1 \\ -\overline{f_1^0(\Delta)} \tilde{\Psi}_1^0 & \overline{f_1^1(\Delta)} \times \cdot + \overline{f_1^1(\Delta)} \tilde{\Psi}_1^1 + \overline{f_1^1(\Delta)} \tilde{\Psi}_1^1 \end{pmatrix}$$

となる。従って $D^* = D$ という対称性を持つ行列は

$$D = \begin{pmatrix} f_0^0(\Delta) \times \cdot & g(\Delta) \tilde{\Psi}_0^1 \\ -g(\Delta) \tilde{\Psi}_1^0 & f_1^1(\Delta) \times \cdot + f_1^1(\Delta) \tilde{\Psi}_1^1 + f_1^1(\Delta) \tilde{\Psi}_1^1 \end{pmatrix},$$

$$f_0^0, f_1^1, \Psi_1^1, \Psi_1^1 \in \mathbb{R}[\Delta],$$

$$g \in \mathbb{C}[\Delta]$$

という形をしている。

さて、(1.13) の同型のもとに (7.2) の D に対応する (2.4) 上の作用素が定理 2.5 で定まる $\text{rad}(D)$ であったが、 $\text{rad}(D)$ をさらに (1.15) の同型を経由して

$$(L^2(A, |r|^{n-1} dr)^{\sigma} \oplus L^2(A, |r|^{n-1} dr)^{-\sigma}) \cap C_c^{\infty}(A) = C_c^{\infty}(A)^{\sigma} \oplus C_c^{\infty}(A)^{-\sigma}$$

の上の作用素として表すと

$$(7.3) \quad \begin{pmatrix} f_0^0(\mathcal{D}_r^2) & f_1^1(\mathcal{D}_r^2) \mathcal{D}_r \\ f_1^1(\mathcal{D}_r^2) \mathcal{D}_r & f_1^1(\mathcal{D}_r^2) + \frac{n-1}{n} f_1^1(\mathcal{D}_r^2) \mathcal{D}_r^2 \end{pmatrix}$$

となるのが容易に計算される。ただし、この行列は $C_c^{\infty}(A)^{\sigma} \oplus C_c^{\infty}(A)^{-\sigma}$ の各要素を 2 成分からなる縦ベクトルのように見なして左から作用する。 $n = 3$ のときにも $f_1^1(\Delta) \tilde{\Psi}_1^1$ の部分の作用が 0 であることに注意しよう。

系 7.2. $C_c^{\infty}(A) = C_c^{\infty}(A)^{\sigma} \oplus C_c^{\infty}(A)^{-\sigma}$ を定義域とする対称作用素

$$\begin{pmatrix} f_0^0(\mathcal{D}_r^2) & g(\mathcal{D}_r^2) \mathcal{D}_r \\ -g(\mathcal{D}_r^2) \mathcal{D}_r & f_1^1(\mathcal{D}_r^2) \end{pmatrix}, \quad f_0^0, f_1^1 \in \mathbb{R}[\Delta], g \in \mathbb{C}[\Delta]$$

は $L^2(A, |r|^{n-1} dr) = L^2(A, |r|^{n-1} dr)^{\sigma} \oplus L^2(A, |r|^{n-1} dr)^{-\sigma}$ 上の本質的自己共役作用素である。

証明. 定理 1.1 (i) と定理 6.7 と定理 7.1 より。 $\square$

同様に (1.7) を制限して得られる線形同型

$$(7.4) \quad \bigoplus_{l=0,1} \text{Hom}_K(\mathcal{H}_l(S), C_c^{\infty}(X)) \simeq L_0^2(X) \cap C_c^{\infty}(X) \oplus L_1^2(X)^M \cap C_c^{\infty}(X)$$

のもとに D を右辺に作用する作用素として表そう。

補題 7.3. $\Phi^1 \in \text{Hom}_K(\mathcal{H}_1(S), C_c^{\infty}(X))$, $\nu = 2, 3, \dots, n$ に対して

$$\Phi^1[x_{\nu}|_S] = (x_{\nu} \partial_1 - x_1 \partial_{\nu}) \Phi^1[x_1|_S].$$

証明. $E_{\alpha\beta}$ で (α, β) 成分が 1 で他の成分が 0 である n 次正方行列を表すと $E_{\nu 1} - E_{1\nu} \in \text{Lie } K = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ である。(1.2) が誘導する $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ の $C_c^{\infty}(X)$ や $C_c^{\infty}(X)$ への作用において

$$E_{1\nu} - E_{\nu 1} = x_{\nu} \partial_1 - x_1 \partial_{\nu}$$

である。特に $(E_{\nu 1} - E_{1\nu})x_1 = x_{\nu}$ なので $\mathcal{H}(S)$ において

$$(E_{\nu 1} - E_{1\nu})x_1|_S = x_{\nu}|_S$$

が成り立つ。よって

$$\Phi^1[x_{\nu}|_S] = \Phi^1[(E_{\nu 1} - E_{1\nu})x_1|_S] = (E_{\nu 1} - E_{1\nu})\Phi^1[x_1|_S] = (x_{\nu} \partial_1 - x_1 \partial_{\nu})\Phi^1[x_1|_S]. \quad \square$$

この補題を使うと、 D が (7.4) の右辺上の作用素として

$$(7.5) \quad \begin{pmatrix} f_0^0(\Delta) & f_1^0(\Delta) (\sqrt{n} \partial_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=2}^n (x_{\nu} \partial_1 - x_1 \partial_{\nu}) \partial_{\nu}) \\ \sqrt{n} f_1^0(\Delta) \partial_1 & f_1^1(\Delta) + f_1^1(\Delta) \tau \end{pmatrix},$$

$$\tau := (n + 3 + x_1 \partial_1) \partial_1^2 - \Delta \left(\frac{n+1}{n} + x_1 \partial_1 \right) + \sum_{\mu=2}^n (x_{\mu} \partial_1 + 1) \partial_1 \partial_{\mu}$$

という表示を持つことが容易に計算される。これも (7.4) の右辺の各要素を 2 成分からなる縦ベクトルのように見なして左から作用する。

系 7.4. (1.16) は線形同型

$$L_0^2(X) \cap C_c^{\infty}(X) \oplus L_1^2(X)^M \cap C_c^{\infty}(X) \simeq C_c^{\infty}(A)^{\sigma} \oplus C_c^{\infty}(A)^{-\sigma}$$

を与えるが、このもとに作用素 (7.5) が作用素 (7.3) に対応する。

8. 結び

本稿の議論の背景には、対称対 $(G, K) = (SO(n, 1)_0, SO(n))$ ($n \geq 3$) の表現論がある。この対称対は階数が1であり、single-petaled K タイプも 2つしかないので、いろいろなものが明示的に表される。それらを使うと本稿の諸結果をより直接的に導くことが可能である。例えば、§5 では一般化された動径成分公式を概念的な方法で示したが、§7 で与えた M の具体的な生成元の 1 つひとつについて公式を直接確かめることもできる。

しかし本稿では、一般の対称対の場合にほとんどそのまま拡張できるように、なるべく対称対 $(G, K) = (SO(n, 1)_0, SO(n))$ ($n \geq 3$) の特殊性に依存しない議論をした。

一方 $n \geq 3$ とした理由は、 $(G, K) = (SO(2, 1)_0, SO(2))$ の場合は single-petaled K タイプが3つ存在し、諸結果の定式化が変わるからである。その場合の (1.13) に当たる対応、 M の具体的な表示、一般化された動径成分公式については [織田, §2] を参照して欲しい。

参考文献

- [Dun] C. F. Dunkl, *Differential-difference operators associated to reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989), 167-183.
- [GW] R. Goodman and N. R. Wallach, *Symmetry, Representations, and Invariants*, Graduate Texts in Mathematics **255**, Springer, 2009.
- [Hec] G. J. Heckman, *A remark on the Dunkl differential-difference operators*, In: Harmonic analysis on reductive groups, Brunswick, 1989, Progr. Math. **101**, 181-191.
- [Hel] S. Helgason, *Geometric analysis on symmetric spaces, Second edition*, Mathematical Surveys and Monographs **39**, American Mathematical Society, 2008.
- [Je] M. de Jeu, *Paley-Wiener theorems for the Dunkl transform*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 4225-4250.
- [Kn] A. W. Knap, *Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples*, Princeton Mathematical Series **36**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986.
- [KR] B. Kostant and S. Rallis, *Orbits and representations associated with symmetric spaces*, Amer. J. Math. **93** (1971), 753-809.
- [OI] H. Oda, *Generalization of Harish-Chandra's basic theorem for Riemannian symmetric spaces of non-*

- compact type*, Adv. Math. **281** (2007), 549-596.
- [O2] ———, *Differential-difference operators and radial part formulas for non-invariant elements*, preprint, arXiv: 1402.3231.
- [T] G. Teschl, *Mathematical methods in quantum mechanics. With applications to Schrödinger operators*, Graduate Studies in Mathematics **99**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [織田] 織田寛, 実簡約 Lie 群と次数 Hecke 環の表現論のつながり, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会函数解析学分科会講演アブストラクト pp.41-50, 2014.
- [中村] 中村周, 量子力学のスペクトル理論, 共立講座「21 世紀の数学」**26**, 2012.

設計・作品
ARTS & DESIGNS

釜山新交通システムの高架橋デザイン*

Aesthetic Design of Viaduct of Busan Light Rail Transit

永見 豊 Nagami Yutaka**

久保田善明 Kubota Yoshiaki***

王 智連 Wang Jiyoun****

杉山 和雄 Kazuo Sugiyama*****

岡本 俊哉 Okamoto Toshiya*****

松金 伸 Matsugane Shin****

審良 郁夫 Akira Ikuo****

米沢 栄二 Yonezawa Eiji****

Abstract

Busan Transportation Corporation organized a competition of design build for the first introduction of the light rail transit in Korea. The jury attached importance to landscape in addition to economy and construction. The authors proposed not only the design of the viaduct itself but also the upper plan such as the route alignment and the platform type of the station from a landscape engineering point of view. As a result, our proposal was adopted. Furthermore, we proposed the design based on the structural characteristics of the structures. In this paper, the concept, examinations and psychological evaluations of the proposed design are described.

Keywords: Aesthetic design, Light rail transit, Design competition



図1 自然環境との調和と連続性に配慮した高架橋

* 原稿受付 平成26年10月15日

** 工学部デザイン学科

*** 京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻

**** (株)オリエンタルコンサルタンツ

***** 杉山デザイン研究所

***** (株)アサノ大成基礎設計

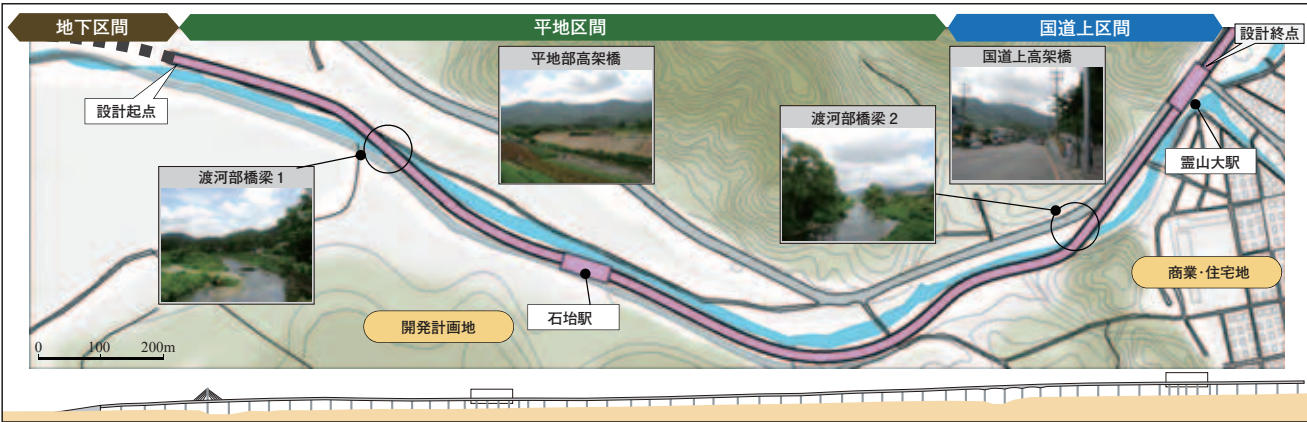


図2 設計区間と周辺環境



図3 シンボルとしての直行型アーチ斜張橋（渡河橋梁部 1）

1. 計画の概要

韓国の釜山市では、郊外から市内までのアクセス向上のため韓国で初となる新交通システムが計画され、2004年11月にコンベ形式の設計・施工一括方式入札が行われた。筆者ら（表1）は、提示された予備設計案に対して、高架橋の景観デザインにとどまらず、路線線形および駅舎のプラットホームの形状の見直しといった上位計画に踏み込んだ提案を行ったところ、設計案が採用されるに至った。

筆者らが提案したコンセプトやそれを踏まえた検討、個々のデザインについては、「釜山新交通の高架橋デザイン」^{〔注1〕}において発表しているが、本稿では完成した作品とその検証を加筆し、再構成したものである。

表1 担当者の役割（2004年当時）

	担当者・当時の所属	役割
杉山デザイン 研究所	杉山（千葉大学 教授）	統括 景観設計 景観設計 歴史・文化調査
	永見（拓殖大学 講師）	
	久保田（千葉大学 研究員）	
	王（千葉大学大学院・韓国からの留学生）	
オリエンタル コンサルタンツ	米沢（東京事業本部 景観・構造グループ）	総括 構造設計
	岡本、松金、審良（ ）	

2. 地域特性とコンセプト

新交通システムは釜山市の釜山都市鉄道4号線^{ドンレアンピョン}東萊駅から安平^{ソクデ}駅までを結び、東萊^{ヨンスンデ}から安平までは高架構造となっている。設計対象は、高架構造の始まる石垣駅手前から霊山大駅までの2,184mの区間であり、開けた平地部から2箇所の渡河部があり、商業住宅地に入り国道上を通過する（図2）。

本区間は釜山のベッタウンとして発達しつつある住宅地が多く点在し、バスや自動車により釜山までアクセスするため交通渋滞や大気汚染等の問題が発生していた。この解決のため、車にかわる交通手段として新交通システムを導入することになった。車両はゴムタイヤ式を採用しており、鉄道に比べ線形の自由度が高く、安価に路線整備が可能である。またバスに比べ定時制、安全性に優れ輸送能力も高いことから、「専用高架を走るバス」と位置づけられる。しかし、高架橋が出現するため、住民に身近な存在として受け入れられるよう、構造物による圧迫感や煩雑感の軽減が課題となる。そこで、路線線形、高架橋、渡河部橋梁に対して、「利便性、安全性に優れ、周辺と調和した身近な新交通システム」をコンセプト

としてデザイン検討を行った。検討を進める中で考慮した整備方針を表2に示す。

表2 景観整備方針

コンセプト	利便性、安全性に優れ、周辺と調和した身近な新交通システム
平面計画	【乗り心地の重視】 ・急カーブやカーブの連続を避ける。 【構造的、施工性の軽減】 ・構造、施工的な制約の大きい道路区間を短くする。
縦断計画	【高架橋の圧迫感の軽減】 ・平地区間では、スカイラインを阻害しないよう低いエレベーションとする。 【桁下の圧迫感の軽減】 ・国道上区間では高いエレベーションとする。
高架橋	【存在の気にならない身近なデザイン】 ・周辺の風景を阻害しないシンプルで身近なデザイン。 ・道路上からの見上げ視点で複雑感のない形式。
渡河部橋梁	【シンボル性】 ・新交通システム、開発エリアを象徴するシンボル性のある橋梁を採用する。

3. 景観デザイン

本稿では圧迫感の軽減を考慮した縦断計画、桁と橋脚の連続性に配慮した標準部高架橋、路線を象徴するシンボリックな渡河部橋梁について、景観検討経緯及び完成した高架橋を現地で確認して、目的とする効果が得られているかの検証について述べる。

(1) 圧迫感の軽減を考慮した縦断計画

図4のように、視界の中に占める桁の大きさが同じであっても、背景との関係性により受ける刺激が異なる。高架橋は周囲の景観に比べて直線的で単純な形態をしており、人間には「図」として知覚されやすい。桁がスカイラインを切ることによって、対比は強まり知覚される存在となる。したがって、圧迫感軽減のため知覚されにくい存在となるよう、平地区間のエレベーション（地面から桁までの高さ）はスカイラインを阻害しないよう、低くなるように変更した。国道上区間では、沿線にビルが建っているため高架橋に近接する視点場から見上げる状態となる。桁下の圧迫感を軽減するため、高いエレベーションに変更した。

現地で高架橋を確認したところ、平地区間では山並みのスカイラインを阻害しておらず（図1）、国道上区間では圧迫感の少ないエレベーションであり、圧迫感の軽減が達成されていた（図5）。

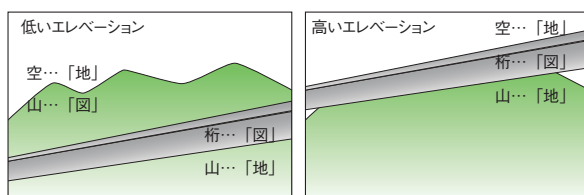


図4 スカイラインと桁の関係

(2) 桁と橋脚の連続性

「身近なデザイン」となるよう形状要素や部材数の少ないシンプルな形状、延長の長い構造物のため「連続性のあるデザイン」となるよう鋼2主箱桁を採用した。2主箱桁は車輪載荷位置にウェブを配置し床版に負担の少ない合理的な構造であり、島式駅舎部への拡幅がスムーズとなる。

橋脚は利用者の視点に近い位置にあるため、圧迫感を与えない橋脚デザインが必要である。特に橋軸方向からは橋脚を



図5 国道上区間高架橋

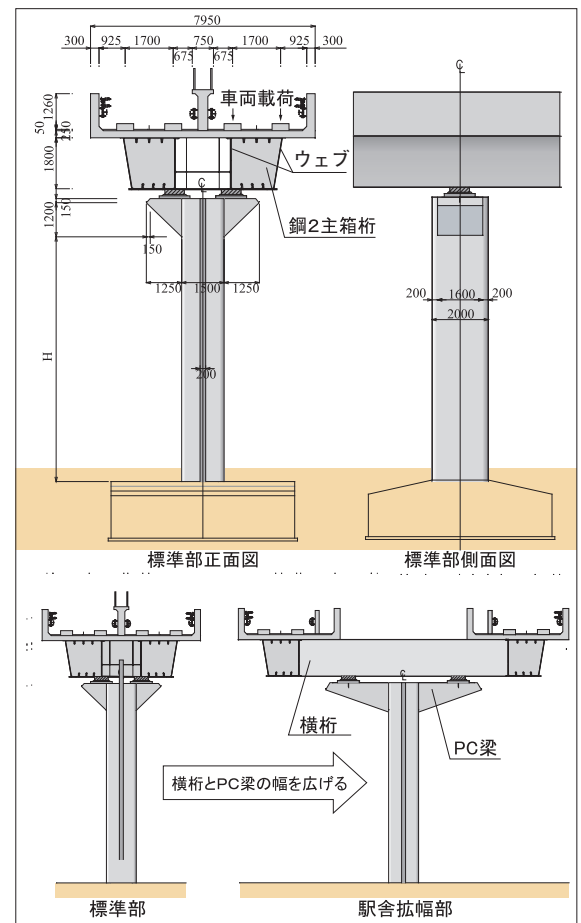


図6 鋼2主箱桁断面と張出付き角柱橋脚図



図7 国道上区間高架橋分岐部

連続して見ることになるため、桁との一体感よりは、標準部と駅舎拡幅部で橋脚デザインが異ならないことが重要である。したがって、標準部と駅舎拡幅部でも連続性が確保できるよう張出付き角柱橋脚を選定した(図6)。

現地確認では、駅舎部に桁は違和感なくスムーズに分岐しており、橋脚の形状も柱の統一感と梁の変化に違和感がなく、連続性が確保されていた。桁の継手は工程と施工面の制約によりボルト継手を採用したが、懸念したとおり側面と下面に継ぎ手による筋が現れ煩雑な印象を受けた。都市内高架橋では、継手の現れない現場溶接を目指すべきであった(図7)。

(3) シンボリック橋梁

平地部の渡河部橋梁1は、線形上車窓からも周辺道路からもよく視認でき、開発エリアの中心に位置することから新交通を象徴するシンボリック的要素を取り入れた橋梁を計画することにした。

デザインは、開発地域の河川対岸同士および遠景にある自然と近景にある都市を結ぶイメージから、アーチを取り入れた。さらにゲート性を演出することを目的として、橋梁形式はアーチを路線に対して直角に配置した斜張橋とした。主塔形状は、控えめで周辺の山々との曲線的調和が図れるアーチ

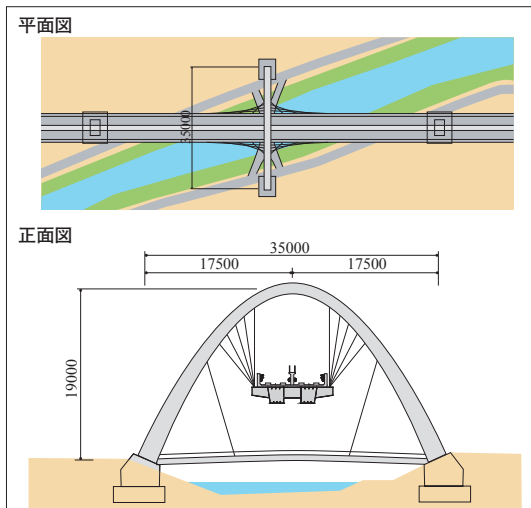


図8 シンボリック橋梁図(渡河部橋梁1)



図9 シンボリック橋梁(渡河橋梁部1)

構造とした(図8)。

現地確認では、車窓から見た時の本地域のゲートの役割を担い(図3)、遊歩道からは背景の山々との調和が図れていた(図9)。ただし、近景での視点ではハンガーケーブルを桁に定着させるブラケットが無骨な印象を与えている。デザインの洗練作業の不足が惜しまれた。

4. おわりに

日本の土木デザインでは、経済性、安全性、耐久性が重視され、景観委員会が機能した場合にのみ景観性は重視される。韓国のコンペに参加して、発注規模が大きく、競争原理の働く発注方式が景観向上に有効であることを実感した。競争の場にあることから景観性が重視され、比較的自由的な条件のもとで景観向上に向けた創意工夫を行うことができた。その結果、延長約2.2kmにわたる高架橋を渡河部や拡幅部があっても全体的に統一したイメージを保持したデザインが実現できたのである。景観・技術力の向上のため国内でもこのようなコンペが実施されることを期待する。

5. 作品概要

- ・所在地 : 大韓民国釜山広域市海雲台区^{ヘウンダ}
- ・橋梁形式 : 鋼2主箱桁橋、張出付き角柱橋脚、標準支間40m、幅員7950mm
- ・路線概要 : 軌間1700mm、新交通システムゴムタイヤ方式、6両編成、全区間複線
- ・竣工 : 2011年3月
- ・事業者 : 釜山交通公社
- ・設計者 : ロッテ建設 + Yooshin engineering corporation
杉山デザイン研究所(景観設計支援)
オリエンタルコンサルタンツ(構造設計支援)

注および参考文献

- 1) 永見、久保田、岡本、王、杉山：釜山新交通の高架橋デザイン、土木学会、景観・デザイン研究論文集No. 4, pp.11-20, 2008.6

研究速報
SHORT NOTES

大規模景観映像生成のための パーティクルベースビジュアルシミュレーション法の開発*

Particle-based Visual Simulation for Large-scale Landscape Images

菊池 司 Tsukasa KIKUCHI

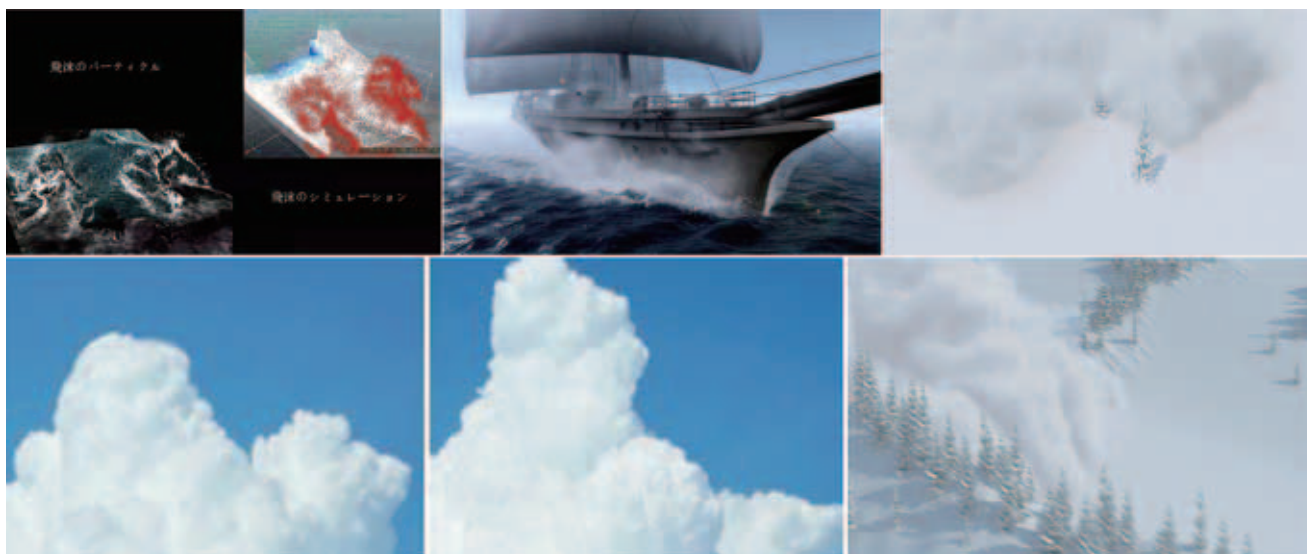


Fig. 1 今年度開発したビジュアルシミュレーション法による成果画像例

1. はじめに

屋外景観の映像をコンピュータグラフィックス (CG) を用いて制作する場合、自然物・自然現象をCGによって再現する必要がある。本稿では、大規模な屋外景観をコンピュータグラフィックスによって再現することを目的として、筆者の研究グループによって開発した3つの自然現象 (White Water、積乱雲、および雪煙) のパーティクルベース・ビジュアルシミュレーション法を報告する (Fig.1)。

2. Particle-based Visual Simulation for White Water

流体現象をCGで表現するビジュアルシミュレーション法は、Navier-Stokes の流体支配方程式を近似的に解くことによって表現する手法が数多く開発され、実用レベルとして供されている。その表現力は視覚的な流体の特徴をリアルに再現し、さらに演出意図によってクリエータ側がシミュレーション結果をコントロールできるようなトップダウン・シミュレーション法も提案されているなど、技術開発としては成熟の域に達した感があるといっても過言ではない。

しかしながら、波が岸壁にぶつかって砕けたり押し寄せる波の先端が崩れていくような「砕波」現象と、波打ち際に発生する泡 (Fig.2) は、液体を固定された座標系で計算するオイラーグリッド法だけでは表現できない複雑な現象である [1-5]。

リアルタイムCGでの水の表現手法には、Blinnによるバンブマッピングを利用する手法 [6] や、Krishnamurthy らによる物体の凹凸を表現する手法 [7] を応用して水面の細波を表現する手法が用いられているが、本研究で示すような砕波現象は



Fig. 2 波打ち際の泡

表現できていない。

そこで本研究では、砕波現象のシミュレーションには粒子法のひとつであるSPH法を非圧縮粘性流体解析用に拡張した手法を用い、さらに砕波から詳細な水しぶきや霧が発生するような空間表現法として飛沫パーティクルを追加する手法を開発した。また、波打ち際に発生する泡 (foam) は、波による海水の攪拌が引き起こすキャビテーションによるものと捉え、SPH法から算出されている流速、静圧力、密度、および水温から算出される飽和蒸気圧から求められるキャビテーション係数を使用して泡の発生を再現する手法を開発した。

3. Particle-based Visual Simulation for Cumulonimbus Cloud

本研究では、まず筆者の研究グループにより開発した浮力計算による積雲発生モデル [8, 9] を単純化し、雲粒子と周囲の

* 原稿受付 平成26年12月8日
東京工科大学

大気との温度差を計算することによって浮力を計算できるモデルを提案する。これにより、浮力計算に必要なパラメータの関係が整理され、インプリメントしやすいモデルとなっている。また、雲粒子と大気とのエントレインメント効果による放熱モデルを用いることにより、内部から沸きあがるような成長過程と、上昇力が弱まった結果下降していく消滅過程の両方を実現したCGによる積乱雲のビジュアルシミュレーションを可能とする手法を開発した。

実際の積雲対流では、気塊が上昇する際、周囲の空気を吸い込み混合するエントレインメントと呼ばれる現象のため、周囲空気との温度差が減少し、浮力が弱まる。

そこで本論文では、以下に述べる手法によりエントレインメント効果による雲粒子の放熱モデルを実現する。

- (1) 雲粒子半径、および雲粒子間力の影響範囲から、シミュレーション空間をボクセルに分割する。
- (2) 全雲粒子を、ボクセル空間に登録する。
- (3) 今、計算対象としている雲粒子が、周囲の空気と接している雲粒子（以後、外部雲粒子と呼ぶ）なのか、周囲の空気とは接していない雲粒子（以後、内部雲粒子と呼ぶ）なのかを判定する。すなわち、計算対象の雲粒子が登録されているボクセル空間の $3 \times 3 \times 3$ 近傍ボクセルに、1つでも雲粒子の登録されていないボクセルがある場合は、計算対象の雲粒子は外部雲粒子であるということができ、 $3 \times 3 \times 3$ の全近傍ボクセルに雲粒子が登録されている場合は、内部雲粒子であるということができる。
- (4) 外部雲粒子に関し、シミュレーション空間の温度分布より、式(1)より温度を平滑化し、更新するものとする。すなわち、雲粒子の更新後の温度を T_c' とすると、式(1)となる。

$$T_c' = T_c + \frac{T_a - T_c}{2} \times \frac{\alpha}{100} \quad (1)$$

α : エントレインメント率 [%]

ここで、前述した浮力計算モデルとエントレインメント効果による放熱モデルの単純なシミュレーション例と、エントレインメント効果を採用しなかったシミュレーション例の比較実験を行った結果をFig. 3に示す。

比較実験では地表面の任意の箇所から雲粒子を任意の粒子温度で発生させ、上昇計算において前述した浮力計算、雲粒子間力、およびエントレインメント効果の有無によって雲粒子の上昇過程の違いを検証したものである。

この比較実験により、本研究で提案する浮力計算モデルとエントレインメント効果による放熱モデルによって、雲内部では内部雲粒子の温度が冷却されることなく強い浮力を維持

し、それに対し雲外部では、外部雲粒子の温度が周囲の空気温度と平滑化されるためにその温度差は徐々に小さくなり、その結果浮力が弱まり、内部から沸き上がると同時に外側は重力によって下降するような積乱雲特有の運動が表現可能となることが確認できる。



(1) No entrainment

(2) Presence of entrainment

Fig. 3 エントレインメント効果の実験

4. Particle-based Visual Simulation for Spay of Snow

雪煙とは、強風にあおられて舞い上がった粉雪状のものや、雪崩によって発生する雪が舞い上がった状態を指す。本研究では、雪崩によってその周辺に発生するものを再現した。

雪崩は、山岳部の斜面上に積もった雪や氷の一部、または全部が重力の作用によって肉眼で識別できる速度で流れ落ちる自然現象を指す。

雪煙のビジュアルシミュレーションでは、パーティクルベースによるシミュレーションとボリュームレンダリングを使用し、現実の雪山により近い状況を再現するものとする。

まず、斜面にそってパーティクルが落下する運動をシミュレーションし、そのパーティクル個々に雪煙となるボリュームを割り当てる。割り当てるボリュームはランダムで変わり、時間とともに大きくすることで雪崩を再現した (Fig. 4)。

Fig. 5に、雪崩による雪煙の実写画像^[10]と本研究による生成画像を示す。

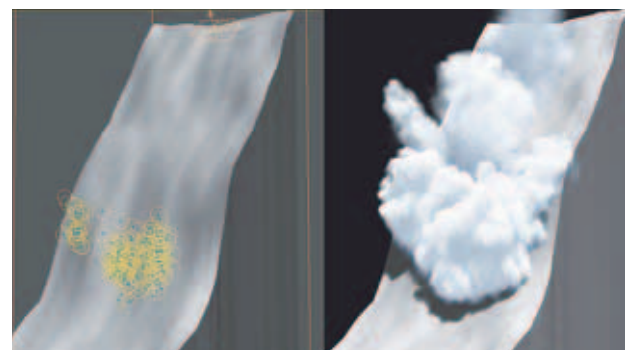


Fig. 4 雪崩による雪煙のシミュレーション



(a) 雪崩による雪煙の実写画像 (http://pds.exblog.jp/pds/1/201302/12/27/c0166427_1421167.jpg より^[10)])



(b) 本研究による生成画像例

Fig. 5 実写画像と本研究による生成画像例の比較

5. まとめ

本稿では、大規模な屋外景観をコンピュータグラフィックスによって再現することを目的として、筆者の研究グループによって開発した3つの自然現象（White Water、積乱雲、および雪煙）のパーティクルベース・ビジュアルシミュレーション法を報告した。

パーティクルベースによるビジュアルシミュレーションを応用することにより、さらに様々な自然現象をCGで再現することが可能であると考えられるため、今後のさらなる研究の発展に尽力したい。

参考文献

- [1] Nick Foster and Ronald Fedkiw, "Practical animation of liquids", SIGGRAPH 2001, 2001.
- [2] Douglas Enright, Stephen Marschner, and Ronald Fedkiw, "Animation and rendering of complex water surfaces", SIGGRAPH2002, 2002.
- [3] Jos Stam, "Stable fluids", SIGGRAPH1999, 1999.
- [4] Geoffrey Irving, Eran Guendelman, Frank Losasso, and Ronald Fedkiw, "Efficient simulation of large bodies of water by coupling two and three dimensional techniques", SIGGRAPH2006, 2006.
- [5] Nuttapon Chentanez and Matthias Mueller, "Real-time eulerian water simulation using a restricted tall cell grid", SIGGRAPH2011, 2011.
- [6] James Frederick Blinn, "Simulation of wrinkled surface", SIGGRAPH Computer Graphics, Vol.12(3), 1978.
- [7] Kishnamurthy and Levoy, "Fitting smooth surfaces to dense polygon meshes", SIGGRAPH1996, 1996.
- [8] 菊池司、村岡一信、千葉則茂、"積乱雲のビジュアルシミュレーション"、画像電子学会誌、第27巻、第4号、pp.317-326、(1998)
- [9] 菊池司、村岡一信、千葉則茂、"積雲型の雲のビジュアルシミュレーション"、画像電子学会誌、第28巻、第2号、pp.140-151、(1999)
- [10] http://pds.exblog.jp/pds/1/201302/12/27/c0166427_1421167.jpg

※本稿は拓殖大学理工学総合研究所・平成25年度共同研究助成の研究成果である。

展望・解説

REVIEWS

子どものための地域学習ツールのデザインの試み*

The design proposals of the regional learning tool for children

工藤 芳彰 Yoshiaki KUDO

Abstract

This article introduces the proposals of the regional learning tool for children designed in Community Design Laboratory, department of design, faculty of engineering, Takushoku University.

There are two tools for the investigation regional learning at the middle grade of elementary school. One is the dice of wooden pencil “Bokutagon” and the card set. Another is the roulette in the form of potted flower “Flower Note”. The purpose of both tools is to increase the children’s activeness. “Localization Tools of Tag Play” is the handbook type tool for the nursery school teachers. The new local tag will be connecting the region and children. “Guruguru Tengu” is a board game themed Mt. Takao in Hachioji, Tokyo. The player will get knowledge about various regional resources from the playing over and over. “Danaodadanzhu” is a board game derived from Chinese traditional game that disks are flipped to hit and capture the other disks.

Keywords: social design, community design, regional learning

1. はじめに

1.1 ソーシャル・デザインの現代性

植民地主義と産業革命を両輪に世界で初めての近代化を成し遂げた19世紀のイギリスでは、新たに勃興した中流階級の人々が、現在の私たちの生活にもつながるヴィクトリア朝文化を形成し、豊かな消費生活を謳歌した。しかし、その繁栄の影には、労働者階級からの搾取や環境汚染など、さまざまな深刻な社会問題が存在した。

このような状況を問題視する人々は、それぞれの方法で批判的活動に取り組み、歴史に名を残した。いうまでもなく、『資本論』を著したカール・マルクス（1818-83）もその一人である。デザイン史についてみれば、中世の生活を理想として独自のデザイン活動に取り組んだウィリアム・モリス（1834-96）がよく知られている。

理想的な社会の実現に向けたモリスのデザイン活動は、行為としてのデザインが、例えば色かたちを決めるという狭義のものではなく、問題解決のための思考を含む広義のものであることをよく示している。本稿では、職業人としてのデザイナーに限らず、「社会的な問題解決のための創造的行為」を指して、ソーシャルデザインと呼ぶ。ソーシャルデザインは社会生活に必要な不可欠なものである。その意味では、社会を形成して生きる人間にとって、最も人間らしい、人類学的な行為の一つと位置付けることもできよう。

近年、少子高齢・人口減少時代を迎え、さまざまな社会問題に直面する日本では、上記のソーシャルデザインが特段の注目を集めている。東日本大震災が起こった2011年以降だけでも、題名に「ソーシャルデザイン」を含む書籍が次々と発行されている〔注1〕。日本の状況は短期的に改善するようなものでなく、また世界的に拡大していくものである。そのことを踏まえると、21世紀は「ソーシャルデザインの時代」と称されることになるのではないかと。

1.2 コミュニティデザインの重要性

ソーシャルデザインの領域は多岐に渡るが、少子高齢・人口減少時代となった日本の最重要課題の一つに、地域コミュニティの再構築がある。

ソーシャルデザインの視点からコミュニティデザインを支援する際に忘れてはならない指標として、クオリティ・オブ・ライフ（QOL）があげられる。QOLとは一般に、ひとりひとりの人生の内容の質や社会的にみた生活の質のことを指し、ある人がどれだけ人間らしい生活や自分らしい生活を送り、人生に幸福を見出しているか、ということ尺度としてとらえる概念とされる。すなわち、私たちはコミュニティの中のQOLを注視していかななくてはならない。

1.3 コミュニティデザインにおける地域学習の重要性

次代の社会を支えるのは現在の子どもたちである。成熟した社会には、子どもが地域とかかわりながら社会の一員としての意識を育んでいく仕組みがある。私たちの身近なものでは、伝統的な祭礼や通過儀礼、自治会行事などがあげられる。しかし、現代の都市生活において、子どもが地域とかかわるための機会や時間は極めて少ない。

例えば小学生の家庭生活を考えてみると、日常的にさまざまな塾や習い事があるため、友だちと遊ぶ機会は限られる。遊び自体についても、安全・安心の見地から保護者の目が届く室内遊びが多くなり、公園などでの外遊びは限られたものとなる。休日についても、まず塾と習い事の時間が固定され、残りのまとまった時間が家族だんらんに充てられる。週末は各種の地域団体が子ども向けの催しを実施するが、保護者の理解がない限り、参加は限られたものとなる。

2. デザインのねらいーフィジカルな遊びについて

以上のように、子どもの家庭生活と地域社会は都市部において乖離しており、前述の「育んでいく仕組み」は機能しにくい。そこで本研究では、子どもたちの園生活及び学校生活に焦点をあて、地域学習を対象として、「フィジカルな遊び」（体を使った遊び）が有する共感性に着目し、地域の共通知識

* 原稿受付 平成26年11月4日

の獲得をサポートする学習ツールの開発を試みた。

体を使った子どもの遊びといえば、オニゴッコ〔注2〕などの伝承遊びが思い出される。絵本作家として知られる加古里子は日本各地の伝承遊びの事例を収集し、その成果を「絵かき遊び・石けり遊び・鬼遊び・じゃんけん遊び」の4つにまとめ、分類と考察をおこなっている〔注3〕。紹介される事例は多様で、ある程度の広さの空間で全身を使って仲間と遊ぶオニゴッコのようなものから、限られた空間で体の一部と道具を使い、一人遊びも可能なエカキウタのようなものまで幅広くある。加古の分類によれば、伝承遊びが有する地域性や多様性は基本的な遊びのバリエーションである。

体を部分的に使う遊びとして、限られた空間で主に手先を使って道具（アイテム）を動かすテーブルゲームがある。これらは伝承遊びをスケールダウンしたものと捉えることができる。テーブルゲームについても、手先が単純にコマの移動の手段としてのみ使われるショウギやオセロのようなものから、体の部分を動かす技術によって優劣が左右されるスゴロクのようなものまで幅広くある。

本研究でいう「フィジカルな遊び」とは、上記の伝承遊びからテーブルゲームまでの範囲を含むものである。ただし、前述したショウギやオセロなどのアブストラクトゲームと、電子ゲームの類は除外する。

3. 研究の方法と手順

研究の方法と手順は以下のとおりである。

- 1) 子どもの遊びおよび地域学習に関する文献調査
- 2) 園や学校における子どもの遊びおよび地域学習に関する実地調査（調査地：八王子ひまわり保育園、八王子市立柵田小学校、八王子市立第三小学校）
- 3) 試作と検証

4. 子どものための地域学習ツールのデザイン

4.1 調べ学習ツール『ボクタゴン』

地域学習は、地域の自然や人々、文化文物（地域資源）を知ることからはじまる。その学びの手法は一般的に「調べ学習」であり、その効果は能動的なほど期待できる。しかし、生活経験や地域とのつながりが希薄な子どもたちにとって、調べ学習の対象を設定すること自体が難しい。その一方で、教師の誘導が過ぎると、児童の学習態度が受動的になりがちである。そこで、児童の学習能力の個人差によらない、調べ学習のテーマ設定をサポートするツールを提案した。

ツールのユーザーは、地域学習が深まり、テーマ選択の必要性が高まる小学4年生とした。学習内容は、新規の学習コンテンツに対応できるように、既存の授業内容に含まれていない「八王子の山車まつりの理解」と設定した。



図1 調べ学習ツール『ボクタゴン』の概要

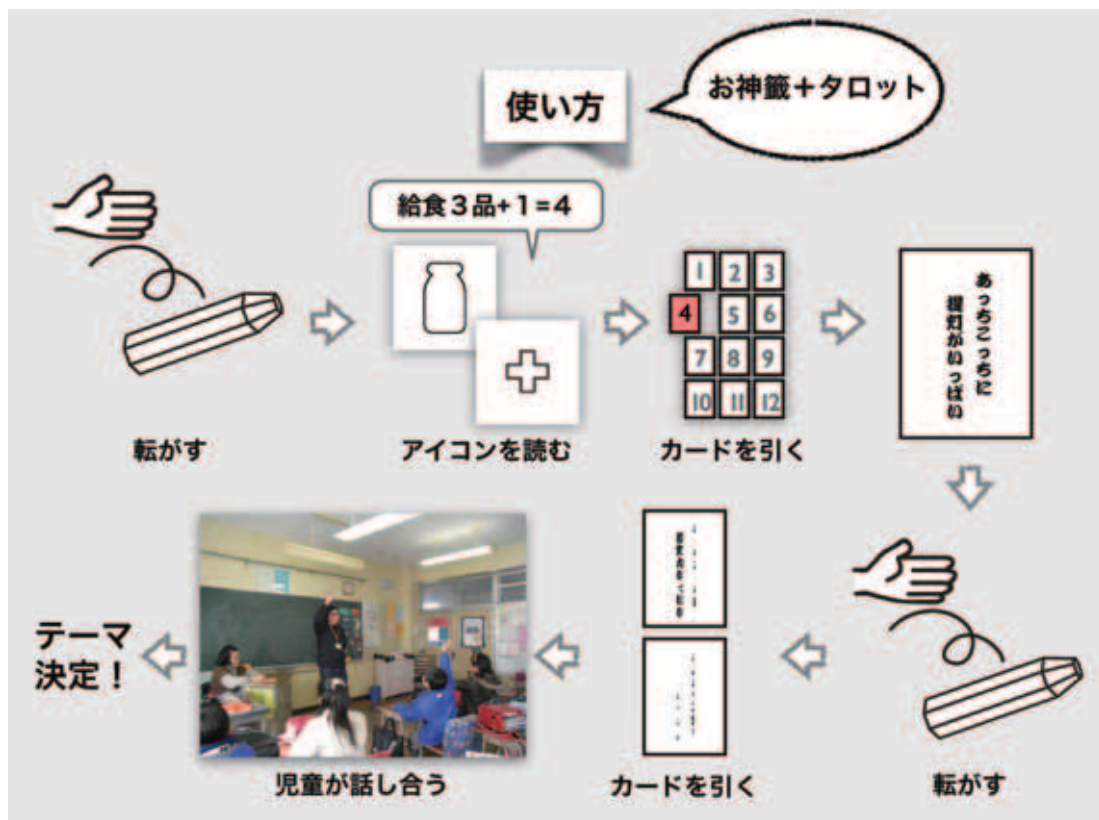


図2 調べ学習ツール『ボクタゴン』の使い方

デザインにあたり、児童の受動性を損なわず、調べ学習のステップを進めるためのアイデアとして、御神籤に代表される古い「ト（ボク）」のシステム（道具と行為の関係）を導入することにした。古来、占いは知（経験知と学問知）がカバーできない問題に対して、ある種の指針を得るために使用されてきた。すなわち、人間の態度を受動から能動へ切り替える役割を担ってきた。

制作した調べ学習ツール『ボクタゴン』（図1）は、八角柱型のサイコロ（長さ192mm×厚さ36mm）と、地域情報のメディアとなるカードデッキ（縦110mm×横70mm・12枚）からなる。

名称は占いの一分野である「ト（ボク）」とサイコロのかたち（オクタゴン）から考案した。児童たちが楽しくサイコロを振ることで、カードを手引きに学習することを能動的に捉えさせる。

サイコロの素材は市の木であるイチヨウと、絹織物の歴史と関連させたクワの2種とした。使用による劣化や汚れを防ぐため、表面にクリヤ塗装を施している。かたちは学習を象徴する鉛筆を模したもので、表面には2面わたる主アイコン4つ（教師、班、時限、給食）と、各面ごとの副アイコン8つ（+、・、-のいずれか）が彫り込まれている。主アイコンは手順4を踏まえて選定したものである。サイコロの目は、主

アイコンと副アイコンの関係によって決定する。例えば、「給食アイコン」と「+」の場合、当日の給食の品数に1を足した数が目となる。基本的に、すべての面で10以下の目ができるようにしている。

カードデッキの表面には山車まつりの特徴を表記している。その内容は手順2を踏まえたものである。サイコロと異なり、カードの内容や枚数の増減は、教師が学習テーマや児童の学習レベルにあわせて作成できる。

ツールの基本的な使い方（図2）は、お神籤とタロットのシステムを組み合わせたもので、教師の指導のもと、班の代表が机上でサイコロを2回振り、裏返しで並ぶカードから目に応じたものを引き、組み合わせて学習の手引きにする。主アイコンの解釈やサイコロを振る回数、カードの組み合わせ方などは、状況に応じて設定可能である。

4.2 学習成果の共有ツール『フラワーノート』

すでに述べたように、調べ学習は児童の能動性を振り所とするため、一定の教育リテラシー下においても、理解度にばらつきが起りやすい。この問題に対処し、上記の導入教育効果を高めるためには、児童間の学習成果の共有が重要となる。そこで、調べ学習の成果発表時に使用する知識共有ツールを提案した。ツールのユーザーは、地域学習の初年度にあたり、プレゼンテーションスキルの低い小学3年生とした。

『フラワーノート』(図3)は、班ごとに調べ学習の成果をまとめることができる情報表現ツールである。児童が親しみを感じることができるよう、鉢植えを模したかたちとした。児童が1人で簡単に持ち運ぶことができ、一般的な学習机に設置しても邪魔にならない。



図3 学習成果の共有ツール『フラワーノート』

同ツールは、画用紙を花びら型に切り抜いた「花卉」(ピンクや黄、青の3種)と、木材を塗装した「花床」(黄色)、「茎」(緑)、「花軸」(緑)、「鉢」(白)の計5つのパーツから構成されている。色彩計画については、情報表現部である花卉パーツに視線が集まるよう配慮している。

花床パーツは高さ2.5cmの八角柱の各面にスリット穴を設けてあり、花卉パーツを差し込むと、摩擦によって保持されるようになっている。八角の理由は、一般的に、小学校の班の構成人数に対応するためである。花床パーツの中央には穴が空いており、これを利用して花軸パーツに装着する。花軸パーツ軸部分の径は、花床パーツの穴より若干小さくなっているため、花床パーツは自由に回転することができる。花軸パーツの軸先には、ミツバチの針を模した模様が描かれており、これが花床パーツ回転後に、発表内容をセレクトする目安となる。花軸パーツはゴム部品により茎パーツに保持されるため、適当な高さで保持される。このことにより、花卉パーツの大小に対応することができる。茎パーツは鉢パーツに差し込まれるが、固定されないため、360度回転する。このことで、班ごとに集まった児童が、同ツールを取り巻いて意見

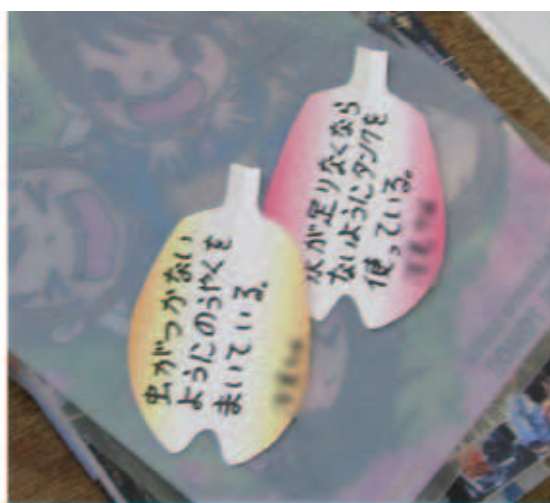
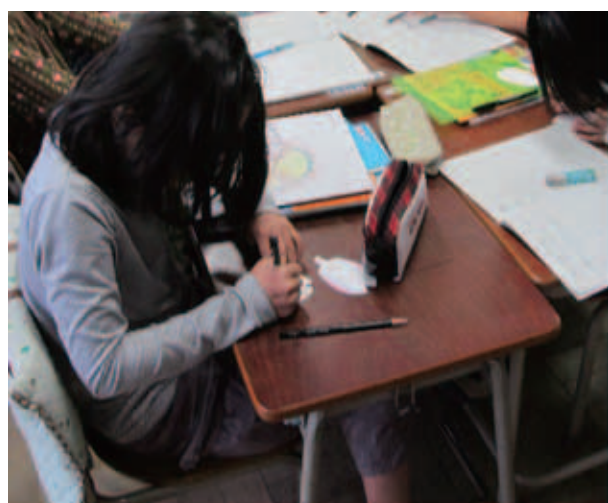


図4 『フラワーノート』検証の様子

交換をすることができる。

授業での使い方の一例は次のとおりである。教師は、『フラワーノート』を各班に配り、調べ学習の成果を発表するよう指示する。児童は発表内容を相談し、分担して花卉パーツに項目を記述する。書き終わった者から、花卉パーツを花床パーツに差し込む。この際、花軸パーツをスムーズに回転させるため、班の構成人数に限らず、8枚の花弁パーツをすべて差し込む。花床パーツを花軸パーツへ装着すれば、成果発表の準備が完成する。教師は教卓上に児童へ向かって『フラワーノート』を置き、各班の発表をうながしていく。図4は実際の検証の結果である。

4.3 地域と子どもをつなぐ鬼遊びのローカライズツール

私たちは、生まれ育った地域のことを考える時、どこで何をして遊んでいたかを思い出すものである。特に、オニゴッコやカクレンボのように、幼児の頃から学年を問わず大人数で遊ぶことのできる「鬼遊び」は、そのルール上、ある程度の空間を必要とするため、遊びの場と強く結びついて記憶されていることが多い。そこで、将来の地域づくりを見通し、遊びをとおして地域と子どもをつなぐため、幼児保育・教育の関係者が一般的な鬼遊びに地域情報を組み込むことのできるローカライズツールを提案した。

まず、八王子市内の保育施設の調査(図5)をもとに、人気の高い鬼遊び3件(オニゴッコ、エスケン、オウサマジャンケン)について、遊びの構造と、ローカライズのために取



図5 鬼遊びの現状調査

り上げる要素、ローカライズの方法をまとめた。

図6は、本研究の成果物となる鬼遊びのローカライズツールの概要を示すものである。幼児保育・教育関係者が、さまざまな遊びのルールや地域情報を持ち歩き、アイデアを考えることができるよう、A5版システム手帳の形態をとった。

ページは上下に2分割されており、上部には、一般的な鬼遊びの情報が、下部に地域情報が配置される。見開き状態において、上部の左側に1件の遊びのルールが解説され、右側にその目的や対象年齢、注意事項などが解説される。下部左は1件の地域情報が解説され、右側はその地域情報に関して、ローカライズのためのヒントが掲載されている。



図6 鬼遊びのローカライズツール



図7 地域学習ゲーム『ぐるぐる天狗』

主たるユーザーとなる保育士や幼稚園教諭は、上部から保育・教育する幼児に合った遊びを選び、見開き状態において、下部をめくっていき、ローカライズのアイディアを考えていく。

4.4 地域学習ゲーム『ぐるぐる天狗』

東京都八王子市に位置する高尾山は、豊かな自然や立地の良さから、年間260万人超が来場する一大観光地となっている。地域学習の視点からみれば、高尾山は多様な地域資源が集まっているという点で、優れた環境学習の場である。しかし、来場者の内訳をみると、中高年の増加の一方、子どもが減少傾向にある。そこで、若年層の環境学習をサポートするために、高尾山を事例とした学習導入用のボードゲーム『ぐるぐる天狗』を提案した。

このゲームは、八王子観光協会と高尾山商店会が初心者向けに発行している観光用マップを下敷きとしており、高尾山を模したルーレット付きの厚紙製の本体と、地域資源カード40枚（4領域×5種×2セット）およびスペシャルカード2枚、コマ4個、サイコロ1個で構成される。同時に2～4人が遊ぶことができる（図7）。

プレイヤーはサイコロを振り、目の数だけコマを進め、山札からカードを1枚引く。ただし、特別マスに止まった場合はその指示に従う。手札は最大4枚までとなり、4枚以上になった場合は余った分を捨て札へ送らなければならない。サイコロを振り、小天狗の面が出た場合はルーレットを回転させる。停止後、示す方向上のマスにコマがあるプレイヤーは、

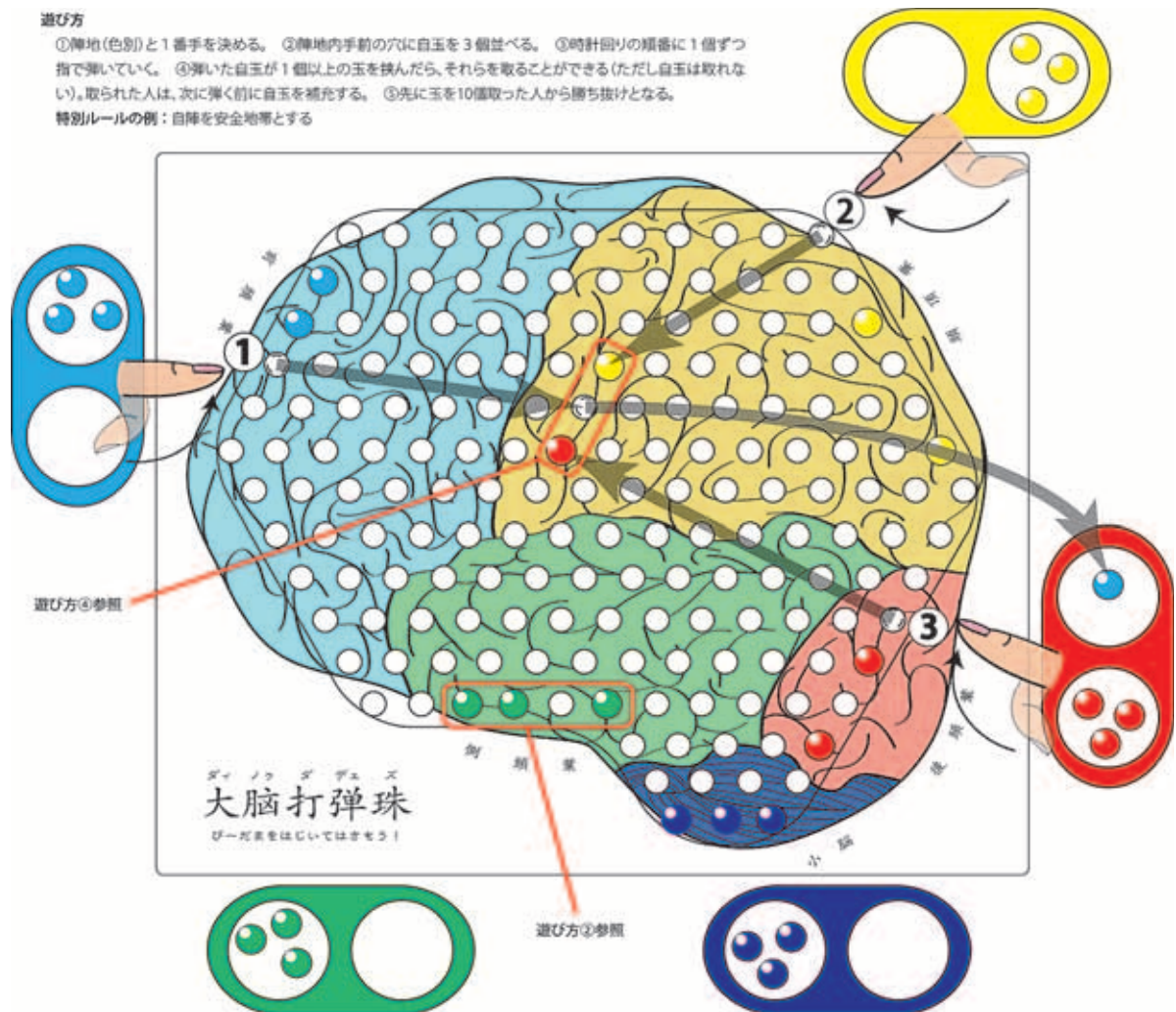


図8 フィジカル・ボードゲーム『脳打弾珠』

手札を1枚捨てなければならない。ルーレットの先端がマス目の跨いで指し示しているときはどちらのマスも対象となる。領域の異なるカードが4枚揃うと登頂することができる。登頂手前のマスで揃っていない場合は、揃うまで山頂周辺を周回しなければならない。

このゲームのプレイヤーは主として、登山や環境学習等、高尾山を何らかの学習の場とする子どもたちである。そのプレイをとおして、例えば家族と何度も登山した経験をもつ子どもは、自らが得ていた知識に気が付くであろうし、それと同時に知らなかったこと、すなわち高尾山の地域資源の多様性を理解の一助となるだろう。もちろん、次回の登山の動機付けや視点の獲得につながることも考えられる。一方、登山経験のない子どもにおいても、ある程度の固有名詞を知っておくことで、実際の登山に向けた導入学習となるだろう。また、複数人でプレイすることによって、登山経験の差をもつプレイヤー間で、新たな発見や教え合いも期待できる。

4.5 フィジカル・ボードゲーム『脳打弾珠』

いわゆる伝承遊びは、異・同世代間コミュニケーションの媒体として捉えられる。かつて、上海の子どもたちは、伝統的な共同住居街である弄堂（ロンタン）の路地に集まり、中国独楽、輪回し、独楽回し、ゴム跳び、石蹴り、おはじき、輪投げ、石落とし、棒遊びなどの伝承遊びをとおして、教授と対戦を繰り返しながら成長していった。しかし、近年の急速な近代化は、遊びをとりまく環境を大きく変化させ、子どもたちの代表的な遊びは日本と同じく電子ゲームとなっている。そこで、現地での聞き取り調査をもとに、前述の9種の遊びから「おはじき（打弾珠）」を選び、その現代版の開発に取り組んだ。なお、この課題を担当したのは上海出身の留学生である。

「脳打弾珠（danaodadan Zhu）」は、小学校の個人用机の上で遊ぶことを念頭においたボードゲームで、端的に言えば、交互に指先で自身のビー玉を弾き合うことによる挟み将棋で

ある。本体は多数の穴の空いた厚紙と、同サイズだが中央部分が大きく抜かれた厚紙を貼り合わせたものである。表面には脳の構造図が印刷されている。これに市販のビー玉を並べ、指で弾く。弾かれたビー玉は上側の厚紙の立ち上がりに跳ね返り、下側の穴に入ることで停止する。一度に2～5人が遊ぶことができる。遊び方の詳細は図8を参照されたい。

ビジュアルのテーマは「脳」である。その理由は2つあり、どちらも遊びの機会を増やすためである。ひとつは、ある種の気持ち悪さによって、こどもの注意を引くためである。もうひとつは、指先を能動的に使うことで、こどもの脳が発達するという解釈を大人に抱かせるためである。

5. おわりに

以上、地域のための学習ツールの事例4件とコミュニケーションツールの事例1件を紹介した。それぞれのあり方は学生に関心の対象とアイデアによってさまざまで、そのこと自体が、ソーシャルデザインの特徴をよく表している。

冒頭で述べたとおり、ソーシャルデザインの代表的な領域としてコミュニティデザインのサポートがあり、その基盤的アプローチとして「子どものためのデザイン」がある。そのことを踏まえると、本稿で紹介したツールは短時間の検証で成果を明らかにすることができないものばかりである。すなわち、長期的な取り組みが求められる。筆者の主宰するコミュニティデザイン研究室では、これらの事例の他にも、地域学習のための動画コンテンツや授業プログラム、ワークショップ等に取り組んでおり、いずれ稿をあらためて紹介したい。

なお、本稿で紹介したツールの開発の一部については、拓殖大学理工学総合研究所の平成22・23年度共同研究助成を受けた。また、その成果については、日本デザイン学会発行のデザイン学研究特集号Vol.20 No.3「子どものためのデザイン01」へ「コミュニティデザインとしての「子どものためのデザイン」の試み」として発表している。本稿は、その内容を加筆修正したものである。

ツール制作の担当学生は以下のとおりである。

『ボクタゴン』：三留 拓也

『フラワーノート』：畠山 龍二

『鬼遊びのローカライズツール』：益田 一博

『ぐるぐる天狗』：近藤 大介

『大脳打弾珠』：庄 易純樹

謝辞

本稿で紹介した地域学習ツールに関する調査および検証については、八王子ひまわり保育園、八王子市立梶田小学校、八王子市立第三小学校の関係者のご理解とご協力を得ている。ここに記して御礼申し上げます。

注

- 1) ここでは以下の7冊をあげておく。

竹村真一他：地球大学講義録——3.11後のソーシャルデザイン、日本経済新聞出版社、2011.07

グリーンズ編：ソーシャルデザイン——社会をつくるグッドアイデア集、朝日出版社、2012.01

山崎亮：ソーシャルデザイン・アトラス 社会が輝くプロジェクトとヒント、鹿島出版会、2012.08

並河進：Social Design 生活をちょっとよくするプロジェクトの作り方、木楽舎、2012.12

ソーシャルデザイン会議実行委員会編著：希望をつくる仕事 ソーシャルデザイン、宣伝会議、2013.03

グリーンズ編：日本をソーシャルデザインする、朝日出版社、2013.04

寛裕介：ソーシャルデザイン実践ガイド 地域の課題を解決する7つのステップ、英治出版、2013.09

- 2) ここでは、子どもたちが実際の生活のなかで呼称しているという意味で、民俗学等に習い、遊びの名称をカタカナ表記としている。

- 3) 加古里子：伝承遊び考3 鬼遊び考、小峰書店、2008

量子多体系としてのブラックホール*

Black holes as quantum many-body systems

関野 恭弘 Yasuhiro SEKINO

Abstract

Black holes are defined in general relativity as regions of space from which nothing can escape. If quantum effects are included, one finds that a black hole has finite entropy and temperature, and eventually evaporates by emitting radiations. An important question is to explain the origin of this entropy, and to clarify whether information is lost or not when a black hole evaporates. String theory suggests that black holes are made of “D-branes,” and that information is preserved. In this article, we review black hole thermodynamics, information problem, and string theory. We also mention our study of D-branes based on an analogy with soft-matter systems (work in progress with Prof. Yasuo Y. Suzuki).

1. はじめに

一般相対論によると、光を含めたすべての物体は重力の影響を受ける。強い重力場のため、自然界で許される最高の速さである光速をもっても脱出できない領域のことをブラックホールという。太陽の約20倍以上の星が寿命を終えて重力崩壊するとブラックホールが形成されると考えられており、様々な観測により、その存在が確認されている¹⁾。X線を発する連星の片方がブラックホールであるケースとして、はくちょう座X-1などが知られている。また、ほとんどの銀河の中心には巨大質量ブラックホールが存在すると考えられている。

ブラックホールは、天文学の観測対象として興味深いだけでなく、純粋に理論的な研究対象としても重要な意味がある。本稿では、量子重力という理論物理学の未解明の課題に対してブラックホールがどのような問題を提起しており、それに対して超弦理論がどのような解決の道筋を示しているかを概観する。最後に筆者らが現在進めている研究に触れることとしたい。

2. ブラックホールの地平面

光すらも脱出不可能な領域の存在は18世紀から想像されており、Laplace や Michellにより以下のような議論がなされていた。ニュートン力学において、半径 R 、質量 M の星による重力に逆らって、質量 m の物体が無限遠に到達するために、星の表面で持つべき速さ（脱出速度） v は、万有引力定数を G として、力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{R}$$

から求まる。脱出速度 v として光速 c を代入すると、

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad (1)$$

となるので、質量 M が、(1)で与えられる R より小さい領域に集中していると、光速で発射された物体も無限遠に到達できないのではないかと彼らは考えた。

もちろん、ニュートン力学では光は重力の作用を受けないので、この議論は正しくなく、ブラックホールの存在を示すには一般相対論を用いなければならない。一般相対論によると、質量が小さな領域に集中していると、ブラックホールの

「事象の地平面」が形成され、その内側から外側へは何物も脱出することが出来ないことが示される。（無限遠への脱出か地平面からの脱出かという違いはあるが、）実は、(1)は、Schwarzschild ブラックホール（回転していないブラックホール）の事象の地平面の半径と数係数を含めて一致しているので、直観的理解には役に立つ。(1)より、太陽の質量（ $M \approx 2 \times 10^{30}\text{kg}$ ）を持つブラックホールの地平面の半径 R は約3kmだということが分かる。太陽の質量がもしそれ以下のサイズに集中したとすると、ブラックホールになる。

3. ブラックホールの熱力学

ブラックホールに落ちた物体がその後どうなるのかというのは誰もが抱く疑問であろう。やや専門的な言葉で言い換えると、物体をブラックホールに落とすと、その物体が持つエントロピーは失われて、熱力学の第2法則が破れるのか、という問題になる。

3.1 熱力学の基本

ここで、エントロピーとその背景にある熱力学、統計力学の考え方について簡単に振り返っておこう。多数の自由度からなる系（分子や原子からなる物体など）を記述するために使われるのが統計力学、あるいは熱力学である。一つ一つの構成要素の状態を指定することなく、全系を特徴づける少数の巨視的な物理量（内部エネルギー、角運動量等）に着目するというのがその考え方である。構成要素が多数あるため、これらの巨視的物理量は統計的手法により正確に求まる。

巨視的物理量の値を決めたときの、可能な微視的状态の数の対数（あるいは、そのような状態を指定するのに必要な自由度の数）がエントロピーである。また、1つの自由度あたりのエネルギーの目安が温度である。（本当は、温度にボルツマン定数を掛けたものがエネルギーだが、本稿の式では、ボルツマン定数を1とする。）

エネルギー保存則より、外部からの力学的仕事を受けない系の内部エネルギー E の変化 dE は、系に与えられた熱量に等しい。熱量は、エントロピーの変化 dS に温度を掛けたもので与えられるので、

$$dE = TdS \quad (2)$$

となる。これを熱力学第1法則という。

* 原稿受付 平成26年10月31日

系が外界から孤立している場合、系は、可能な状態数が最も多いような状態に落ち着く。つまり、孤立系ではエントロピーが増大する。これを熱力学第2法則という。

3.2 ブラックホールのエントロピーと温度

ブラックホールに落とした物体は外部に取り出せないで、そのエントロピーをどう考えればよいのかは明らかでない。しかし、1970年代のBekenstein²⁾、Hawkingら³⁾の研究により、ブラックホール自体を、エントロピーと温度を持った熱力学的物体だと考えるべきであることが明らかになってきた。彼らの提案をまとめると、以下のようになる。

ブラックホールのエントロピー S は地平面の面積 $A = 4\pi R^2$ に比例し、

$$S = \frac{A}{4\ell_p^2} \quad (3)$$

で与えられる。ここで、

$$\ell_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.6 \times 10^{-35} \text{m}$$

は、プランク長と呼ばれる長さのスケールである。万有引力定数 G と量子論を特徴づけるプランク定数 $\hbar$ を用いて定義されていることから分かるように、 ℓ_p は重力の量子効果が重要になると考えられる長さである。 ℓ_p 以下の距離では、古典的な空間という概念に意味がなくなるのではないかと考えられている。

また、ブラックホールの温度 T は、

$$T = \frac{\hbar c}{4\pi R} \quad (4)$$

で与えられる。

ここで定義されたエントロピーと温度は、熱力学の法則と整合性がある。ブラックホールのエネルギーを、相対論に基づく関係式 $E = Mc^2$ により定義し、質量と半径の関係(1)を使うと、(3)の変分が第1法則(2)に一致することがすぐに分かる。

温度(4)は、表面重力と呼ばれる、ブラックホール地平面上の重力の強さを表す量に比例している。表面重力は、地平面全体で一定の値をとるが、この事実、熱平衡にある物体では物体全体で温度が一定である、という熱力学第0法則に対応している。

ブラックホールが物体を吸い込むと、質量が増加し、それに伴って地平面の面積が増大する。また、複数のブラックホールが合体する場合、地平面の面積の合計は減少することがないことが証明されている。これらは、地平面の面積をエントロピーと考えた際に熱力学第2法則が成り立つことを示唆している。

さらに、ブラックホールの性質は、重力崩壊してブラックホールを形成した物体の詳細にはよらず、質量、角運動量、

電荷のみで特徴づけられることが分かっている。この事実も、いくつかの物理量で物体のマクロな状態を指定するという熱力学の考え方と合致している。(2)では、簡単のため、角運動量と電荷はゼロとしたが、これらがゼロでない場合でも(2)を拡張した熱力学的関係式が存在する。

ブラックホールと熱力学の間のこのような関係は、当初、形式的な類似かもしれないと考えられていた。実際、上に挙げたような古典論に基づく議論からは、エントロピーが面積に比例することは結論できても(3)、(4)に現れる係数までは決められない。

しかし、その後のHawking⁴⁾による解析により、ブラックホールは、(4)の温度の黒体放射のスペクトルを持った量子的な放射(Hawking放射)を放出していることが分かり、温度やエントロピーに実体があることが分かって来た。Hawkingの解析は、ブラックホール時空のまわりの微小な揺らぎの量子化によっていたが、このような手法は半古典近似と呼ばれる。

ブラックホールのエントロピーと温度は、その定義にプランク定数が含まれていることから明らかなように、本質的に量子的な量である。古典論に対応する極限 $\hbar \rightarrow 0$ をとると、エントロピーは無限大に、温度はゼロになる。太陽程度の質量を持ったブラックホールを例にとり、エントロピーと温度を見積もってみよう。(3)で与えられるエントロピーは $S \approx 10^{76}$ となるが、これはそこに含まれる陽子の個数の約 10^{19} という莫大な数である。また、(4)で与えられる温度は $6 \times 10^{-8} \text{K}$ となり、日常的な基準で考えて小さいのみならず、宇宙背景放射(約3K)と比べても8桁小さい。

4. ブラックホールの蒸発

(1)、(4)から分かるように、エネルギー(質量)が大きいブラックホールの方が温度が低い。つまり、ブラックホールは通常の物体とは異なり、負の比熱を持つ。負の比熱を持った物体は熱力学的に不安定で、放射を放出することにより温度が上昇し、それに伴いエネルギーを失い、最終的には蒸発すると考えられる。

ただし、蒸発に要する時間は非常に長い。太陽質量を持ったブラックホールが持つ温度が非常に低いことを上で述べたが、その黒体放射の強度をStefan-Boltzmannの式を用いて見積もることによって求められた蒸発時間は M^2 に比例し、 10^{67} 年となる。これは宇宙年齢(10^{10} 年)よりずっと長いので、ブラックホールの蒸発が観測可能な効果を生む可能性は低いと考えられている。(ただし、もし宇宙初期において、現在考えられているより小さい質量を持ったブラックホールが生成されたとすると、その蒸発の効果が観測できる可能性はある。)

4.1 ブラックホールの情報喪失問題

ブラックホールが蒸発すると、ブラックホールを形成した物質に関する情報は失われるのだろうか。前述のように、ブラックホールは、元の物質の性質によらず、質量、角運動量、電荷のみで特徴づけられる。また、Hawkingが発見した輻射は黒体輻射のスペクトルを持つ。このスペクトルは、光子の決まった状態ではなく多数の可能な状態の平均を表しており、そのうちのどの状態の光子が現れるかは予言できない。これらの事実から、Hawking は、ブラックホールが形成され蒸発する際に、元の物体が持っていた情報は失われると主張した⁵⁾。

Hawkingが主張する情報の喪失と、日常生活で思い浮かべる情報の喪失の違いに注意しておく必要がある。例えば、本を燃やしたら、その本が持っていた情報は失われたと考えるのが普通だが、これは、系を粗視化することによる情報の喪失である。もし、本を燃やすことによって出た空気や灰の分子の状態を精密に記録することが出来れば、本が持っていた情報を再構成することは原理的に可能である。それが技術的に難しいので、情報が失われたように思われるわけである。それに対して、Hawkingの主張は、ブラックホールが存在すると物理学の基本法則のレベルで情報の喪失が起こるといえるものである。

古典力学では、ある時刻での系の位置と運動量を正確に決めればその後の運動は正確に予言でき、時間をさかのぼって過去にどのような状態にあったかも正確に分かる。量子力学では、系の状態は波動関数 $|\Psi\rangle$ で表され、系が状態 $|x\rangle$ にある確率は $|\langle x|\Psi\rangle|^2$ で与えられる。時間発展は $|\Psi\rangle$ にユニタリ演算子 U を作用させて $U|\Psi\rangle$ により表され、確率の保存 $\int dx |\langle x|\Psi\rangle|^2 = 1$ は常に成り立つ。波動関数 $|\Psi\rangle$ で表される状態を量子的な純粋状態という。複数の純粋状態 $|\Psi_i\rangle$ を古典的な意味で足し合わせた状態は混合状態と呼ばれ、密度行列 $\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$ (ただし $\sum_i p_i = 1$) で特徴づけられる。統計力学に現れる熱的な状態は、混合状態である。純粋状態が時間発展により混合状態になることはないというのは量子力学の大前提である。状態にユニタリ演算子を作用させることにより時間をさかのぼって過去の状態を再現することも可能であるという意味で、この性質は量子的な情報が保存されることを意味している。

Hawkingが主張したように、ブラックホールを考慮すると、情報の保存という物理法則の大前提を変更しなければならないのだろうか。あるいは、ブラックホールの形成と蒸発のプロセスにおいても、何らかのメカニズムにより実は情報は保存されているのだろうか。この問題は、長年の論争の的だった。(この問題に関する一般向けの解説として、文献⁶⁾ 参照。) Hawkingの解析は半古典近似に基づいていたが、この問題に最終的な結論を下すには量子重力の理論が必要になる。現在では、情報は保存されているという考え方が主流になっている。(Hawking 自身もその立場に転じている。)⁷⁾ しかし、未

だ、問題が完全に解決したとは言い難い。

以下では、情報の保存がどのような考え方に基づいて主張されているかを説明し、超弦理論がその考え方を支持していることを述べる。

5. ブラックホールの熱力学から示唆

ブラックホールの熱力学的性質を踏まえて、量子重力に関して、「ホログラフィー原理」と「相補性」という2つの仮説が提案された。これらが成り立つことにより、量子重力理論において、情報の保存が実現されるはずだと考えられている。

5.1 ホログラフィー原理

ブラックホールのエントロピーは、通常の物体のエントロピーのように、何らかの微視的な構成要素の自由度の数としての意味があるはずだと考えられている。また、ブラックホールのエントロピーとその他の物体のエントロピーの合計が増加する、という「一般化された第2法則」²⁾ が成り立つと考えられる。

一般化された第2法則が成り立つとすると、任意の物体が持つエントロピーの上限は、その表面積に比例し、(3)で与えられる、という帰結が得られる。なぜなら、物体が重力による収縮によりブラックホールになる際にエントロピーが増大するなら、元の物体のエントロピーは、ブラックホールのエントロピーより小さいはずであり、また、元の物体の表面積はブラックホールの地平面の面積より大きいからである。(3)は、球対称な場合に関する式だが、より一般に適用可能な、一般共変性を持った形でのエントロピーの上限も提案されている⁷⁾。) ブラックホールは、エネルギーを一定としたときにエントロピーを最も密に詰め込んだ物体であろうと考えられている。

前述のように、ブラックホールのエントロピーは、通常の物体のエントロピーに比べて桁違いに大きいので、エントロピーの上限は、観測に関して特に影響はないかもしれない。しかし、自由度の数を表すエントロピーは示量性の量であり、通常、体積に比例すると考えられているのに、その上限が表面積で与えられるというのは、非常に不思議である。

このことから、量子重力理論における基本的自由度は空間の各点に存在するのではなく、その表面上に存在するはずだという仮説が提案されている⁸⁾。この仮説は、2次元面に3次元的情報を記録するホログラフィーに例えて、「ホログラフィー原理」と呼ばれている。

5.2 ブラックホールの相補性

また、ブラックホールにおいて情報が保存されるメカニズムとして、「ブラックホールの相補性」と呼ばれる仮説が提案されている。それによると、量子重力の理論は、1人の観測

者が観測できる自由度を用いて構成されるべきであるとされる。つまり、ブラックホールの内部と外部の自由度を同時に考えるべきではない。外部に留まっている観測者の視点からは、ブラックホールに落ちる物体は重力による赤方偏移のため地平面に近づくにつれ減速し、有限の時間内には地平面を超えられないように見える。その意味では、外部の自由度のみに着目するのは自然な考え方であろう。しかし、「相補性」の主張は、それだけでなく、外部の観測者が観測できる自由度を使って理論を構成すれば、その理論はその観測者が観測できない領域（地平面の内側）も含めた全ての情報を含んでいる、という非常に大胆なものである。（「地平面の外側の自由度と内側の自由度は独立ではなく、同じ事柄に対する別な記述の仕方である。外部の自由度を使うか内部の自由度を使うかは、量子力学で、位置を変数とするか運動量を変数とするかの違いのようなものである」という意味で、量子力学で使われる相補性という用語が使われている。）

ブラックホールに落とした物体の情報は、地平面上の自由度に蓄積された後、Hawking 輻射に担われて外部に放出されると考えられる。その際、重要になるのは、次のような量子情報の定理⁹⁾である。多数の自由度からなる量子系の一部のみを観測できるとした場合、観測できる部分系が全系の半分以上の自由度を持たない限り、系の状態に関する情報は全く得られない。具体的には、全系が典型的な純粋状態にあると仮定し、観測できない部分をトレースアウトして部分系のエントロピーを求めると、ほぼ最大である（すなわち情報が無い）ことが示されている。これが示唆しているのは、Hawking 輻射が熱的なランダムなスペクトルを持つのは、小さい部分系を見ているためであるということである。全系の半分以上の自由度を集めれば、系の情報が得られることから、じゅうぶん多くの Hawking 輻射を集めれば、ブラックホール内部の情報が再構成できると考えられる。

（この考え方は、最近の Popescu らによる統計力学の基礎付けの試み¹⁰⁾に類似している。統計力学で、エントロピーを定義するためには、通常、系の粗視化というやや曖昧な操作が必要になるが、彼らは、そのような操作なしに、全系が量子的純粋系であるとして、部分系のエンタングルメントエントロピーとして全てのエントロピーを導くことを目指している。）

ホログラフィー原理と相補性は、直観に反する大胆な主張であるが、論理的な矛盾は見つかっていない。相補性が、量子力学の一般的性質である「量子状態の複製禁止則」と矛盾しないのかという点は、提案当初から検討対象となっており、矛盾を導く可能性のある思考実験が提案されたが、そのような実験は原理的に不可能だという結論になっている。（最近の議論は、筆者らの論文¹¹⁾参照。）

最近、地平面内部の空間は実は存在せず、地平面のわずかに内側に「防火壁」(firewall) と呼ばれる特異点が存在するは

ずだという主張¹²⁾がなされ、相補性の考え方に疑問が呈された。その当否は、多くの論文により盛んに議論されており、反論としては論文¹³⁾などがある。現時点で、防火壁の主張が正しいと考える強い理由は無いように思われるが、完全な結論は未だ出ていない。

6. 超弦理論

上で挙げたホログラフィー原理と相補性は、あくまで仮説であり、実際の量子重力の理論でそれがどのように実現されるかが問題である。何がブラックホールのエントロピーを担っているのか、空間の表面で定義された理論とはどういうものなのか、を明らかにしなければならない。量子重力への有力な試みである超弦理論は、その答えを示唆している。まず、超弦理論がどのようなものかを手短かに説明する。

6.1 場の量子論と超弦理論

自然界の物理法則は、場の量子論を用いて表されている。時空の各点で定義された量のことを場と呼び、電場（電界）や磁場（磁界）、重力場などがその例である。場を量子化することにより、電磁気力を伝える光子をはじめとする粒子が現れる。電磁場のような力を伝える場の他、電子やクォークといった粒子も場によって表される。場の量子論では粒子と反粒子の対生成や対消滅が起こる。対生成と対消滅があらゆるスケールで起こることに伴い、場の量子論の計算では一般に発散が生じる。しかし、この発散は、繰り込み（結合定数の再定義）という操作により除去することができ、有限な物理量が得られる。朝永振一郎らによって確立された量子電磁気学では電子の異常磁気能率が 10^{-8} という高い精度で実験と一致している。また、一昨年発見されたヒッグス粒子の存在を、40年以上前から研究者が確信していたのも、ヒッグス場を導入することにより理論が繰り込み可能になるためである。しかし、重力場を量子化しようとすると、近距離で相互作用が強くなるため繰り込みが不可能になる。

超弦理論は、粒子の代わりにひもが伝播するという考え方である¹⁴⁾。重力子（重力を伝える粒子）は、輪ゴムのような閉じた弦の振動の固有状態として表される。超弦理論では、弦の持つ大きさのため、距離ゼロでの対生成と対消滅は起こらず、発散が回避できる。超弦理論は、相対論と量子力学と矛盾せずに重力の量子化を実現する、現在知られた唯一の方法である。しかし、超弦理論が確立しているのは平坦な時空のまわりの摂動論（小さい揺らぎの理論）としてであり、ブラックホールの形成と蒸発のような時空のダイナミクスが関与する現象は、未だ解明の途上である。

6.2 D ブレーン

1990 年代以降、超弦理論の非摂動的性質が明らかになって

きた。特に、理論に「D プレーン」と呼ばれるソリトンが存在することが分かった。超弦理論には、閉じた弦の他に開いた弦が存在するが、D プレーンとは、開いた弦の端点が位置することの出来る物体である。(開いた弦が膜のような物体の上に固定されていることから、固定端を表す Dirichlet 境界条件の頭文字 D と、膜を表す membrane の brane をとって、D-brane という名前がつけられている。)

D プレーンには、様々な次元のものが存在し、 p 次元の広がりを持つものを Dp プレーンと呼ぶ。(例えば、点状のものが $D0$ プレーン、線状のものが $D1$ プレーン、等。) 超弦理論の種類によって、存在する p の値が決まる。

6.2.1 D プレーンの状態数としてのエントロピー

超弦理論において、ブラックホールは D プレーンの集合体であると考えられている。ブラックホールのエントロピーは D プレーンの状態数 (あるいは、その外部とのエンタングルメントの度合い) を表すと考えられる。

これまでに、特別なブラックホールに関しては、そのエントロピーが D プレーンの状態数により導出されるという発展があった¹⁵⁾。ただし、これは、ゼロ温度のブラックホールの残存エントロピーという非常に特別な例だった。D プレーンは互いに強く相互作用しているため、状態数を数えるのは通常、難しいが、ゼロ温度では超対称性 (フェルミ粒子とボーズ粒子を入れ替える対称性) に基づく表現論による理由から、結合の強さによらずに状態数が決まるため、弱結合極限での計算で正しい答えを得ることができる。

しかし、一般のブラックホールでは、そのような数学的手法が使えないので、その微視的状态や形成と蒸発のダイナミクスを D プレーン多体系により説明することはまだできていない。

6.2.2 D プレーン理論と超弦理論の対応

D プレーン系は、重力を含まない場の量子論 (ゲージ理論) で表される。特別な場合には、この理論によって、超弦理論を再構成できることが知られている。

特に、 $D3$ プレーンを表すゲージ理論と反ドジッター (AdS) 時空の上の超弦理論の間の等価性は、AdS/CFT 対応と呼ばれ、1997 年に予想された後、様々な証拠が得られ、正しいと考えられている¹⁶⁾。このゲージ理論は、AdS 時空の境界 (表面) で定義されており、ホログラフィー原理の具体的な実現である。AdS/CFT 対応の発見により、ホログラフィー原理が広く受け入れられるようになった。

AdS/CFT 対応は、いわゆる強結合と弱結合の双対性であり、一方の理論が簡単 (弱結合) な場合、他方の理論は複雑 (強結合) になる。理論が持つ超対称性と共形対称性という高い対称性のため、様々な解析が可能になっているが、対応の

全貌が理解されているわけではない。特に、ブラックホールの形成と蒸発といった現象がゲージ理論で具体的にどのように表されるかは、よく分かっていない。例えば、ブラックホールの地平面は、その上の揺らぎが通常の場合の理論より速い速度で拡散する、といった特徴的な性質を持つと予想されているが¹¹⁾、ゲージ理論でそれを証明することは出来ていない。

また、 $D3$ プレーン以外の理論に関するホログラフィー原理に基づく対応も存在するはずであるが、対称性が低いそれらの理論に関する理解はあまり進んでいない。

7. 量子多体系としてのブラックホール

ブラックホールの謎の解明のためには、D プレーン多体系の性質を、対称性から決まるものだけでなく、一般的に明らかにすることが重要である。ここでは、まず D プレーン系が持つ特徴的な性質を説明し、その後、我々が行っている研究の方向を述べる。

7.1 D プレーン系の特徴

ここでは、 $D0$ プレーン (点状の D プレーン) を考えることにする。 $D0$ プレーンは M 理論 (超弦理論の 1 つの極限) の基本的自由度であるということが、Banks¹⁷⁾ によって提案されている。また、ブラックホールの性質の本質的部分は、 $D0$ プレーン多体系の性質により説明されると考えられる。

D プレーンは様々な点で従来知られた物質と異なる性質を持つ。D プレーンの N 体系は、 $N \times N$ エルミート行列を用いて表わされる。対角要素が D プレーンの座標を表すが、非対角要素はそれらをつなぐ弦に起因する、従来の系での類似物がない自由度である。また、D プレーン系は $U(N)$ ゲージ対称性という、フェルミ統計やボーズ統計という通常の統計性を拡張した対称性を持っている ($U(N)$ 群の作用でつながる配位は同一視される)。

$D0$ プレーンは空間的広がりがないので、場の量子論ではなく量子力学で記述される。 $D0$ プレーンの N 体系のハミルトニアンのボソン部分は、

$$H = \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d P^{(i)} P^{(i)} - \frac{g^2}{4} \sum_{i,j=1}^d [X^{(i)}, X^{(j)}]^2 \right] \quad (5)$$

で与えられる¹⁷⁾。物理的状态としては、ゲージ不変な状態のみが許される。ここで、 $X^{(i)}$ は $N \times N$ エルミート行列で、 i, j の添字は、空間座標を表している。超弦理論が 9 次元空間で定義されているため、通常、 $d = 9$ までの和をとる。 $P^{(i)}$ は、 $X^{(i)}$ に対する共役運動量からなる $N \times N$ エルミート行列である。相互作用は行列の交換子の 2 乗のトレースの形で表されているが、全ての行列要素が他の全ての行列要素と相互作用していることが解析を難しくしている。これが情報の早い拡散を可能にする理由でもあると考えられる¹¹⁾。

筆者らは、これまで、ゲージ/重力対応とモンテカルロ法による数値解析¹⁸⁾により、D プレーン系の相関関数を求めた。それにより、理論の結合定数が次元を持っているにもかかわらず、特定の演算子の相関関数は冪則に従うことなどが分かった。また、(5)を単純化した行列模型のスペクトルを求め、平衡化に要する時間に関する定理を導いた¹⁹⁾。そこで開発した手法の実際の系(5)への適用は今後の課題である。D0 プレーン多体系に関する定量的な研究は上記のもの以外にはほとんどない。

D プレーン多体系は、エネルギーに応じた空間的広がりを持った束縛状態を形成するはずである。しかし、(i)束縛状態においてどのような配位が支配的なのか、(ii)ブラックホールを表す状態とそうでない状態はどう区別されるのか、(iii)ブラックホール状態では、ほとんどの自由度が表面に集中しているのか、あるいは、外部とのエンタングルメントが表面の自由度によって担われているだけなのか、等の問いに関する答えは全く分かっていない。また、ブラックホールの相補性によると、外部の観測者による記述からブラックホールに落下する観測者の記述に移るためのユニタリ変換が存在するはずであるが、それがどのようなものかも分かっていない。

7.2 ソフトマター系との類似

ブラックホールに関連したこれらの問いに答えることを目指し、筆者と鈴木康夫教授（拓殖大学工学部基礎教育系列）は、D プレーン多体系の量子的性質の研究を行っている。特に、ソフトマター系との類似に着目し、そこで培われた手法の応用により、D プレーン系の新たな解析方法を開発することを目指している。

ソフトマターの研究対象は、小さい単位の分子構造（単量体）がくりかえし構造を持つような物質で、鎖状高分子、ゲル（高分子のネットワーク）、界面（膜）、コロイド（液体中の固体粒子）等がその例である。（文献²⁰⁾の解説参照。）ソフトマター研究では、いくつかの基本的な前提（理想鎖のエン트로ピーに起因する弾性力、良溶媒中の高分子が伸びやすい性質を表す排除体積効果等）をもとにした理論から出発し、平均場理論や繰り込み群等の手法を用いて、スケーリング（変数の間の簡単な冪則）や、ユニバーサリティ（単量体の間の相互作用の詳細によらずに系の性質が決まること）が導かれる。スケーリングとユニバーサリティは、質量、電荷、角運動量以外の特徴を持たないことが示されているブラックホールに期待される性質である。

D プレーン多体系は、相互作用により特定の構成要素が強く結びつき、空間内で高分子のようなくくりかえし構造を示すことが予想される。鎖状になるか、面状になるかは、結合の強さに依存するので、現時点では明らかでない。ソフトマター分野でのこれまでの研究により、様々な形態の物質の様々な

パラメータ（溶媒との親和性、温度、高分子の剛性、電離しやすさ等）への依存性が分かっているため研究の最初の段階として、まず、知られている結果とブラックホールの性質を比較する。空間的広がり（地平面の面積）、温度、エネルギー、エン트로ピー、等がブラックホールにおけるスケーリングを再現するような既知の物理系が存在するかを検討している。

その結論を念頭に、今後、D プレーンから導かれるソフトマター系はどのようなものであるかの検討を始める。特に、ソフトマターの解析で本質的な役割を果たす概念である排除体積に着目する。論文¹⁹⁾の解析によると、ゲージ群の空間における角運動量により、D プレーンが空間的に接近したときの斥力が生じることが分かっており、これを排除体積効果として取り入れる。

また、D プレーンの電荷が多体系の性質にどのような影響を与えるかを検討している。高分子電解質では、対イオン凝縮（高分子から分離したイオンが高分子付近に凝縮する現象²¹⁾）や、過剰スクリーニング（電荷の遮蔽が過剰に起こり、同種の電荷を持った高分子同士に引力が働く現象）という特徴的な現象が起こる。それらに相当する現象がD プレーン系では何なのかを明らかにしたい。

さらに、回転しているソフトマター系とブラックホールの対応を明らかにする。回転しているブラックホールでは、ブラックホールからのエネルギーの抽出や回転軸方向へのジェットの噴射という特徴的な現象が起こるが、それらに対応するソフトマター系の現象を探索したい。

上記の方針に基づく研究成果を、本報告の今後の号で報告したいと考えている。

謝辞

この研究は、平成26年度拓殖大学理工学研究所共同研究の助成を受けて行われました。

参考文献

- 1) 小山勝二、嶺重慎、“ブラックホールと高エネルギー現象”日本評論社、2007年。
- 2) J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
- 3) J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, “The Four laws of black hole mechanics,” *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).
- 4) S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes,” *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975) [Erratum-ibid. **46**, 206 (1976)].
- 5) S. W. Hawking, “Breakdown of Predictability in Gravitational Collapse,” *Phys. Rev. D* **14**, 2460 (1976).
- 6) L. サスキンド、“ブラックホール戦争”日経BP社、2009

年.

- 7) R. Bousso, "The Holographic principle," *Rev. Mod. Phys.* **74**, 825 (2002)
- 8) L. Susskind, "The World as a hologram," *J. Math. Phys.* **36**, 6377 (1995)
- 9) D. N. Page, "Average entropy of a subsystem," *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1291 (1993).
- 10) S. Popescu, A. J. Short and A. Winter, "Entanglement and the foundations of statistical mechanics," *Nature Physics* **2**, 754 (2006).
- 11) Y. Sekino and L. Susskind, "Fast Scramblers," *JHEP* **0810**, 065 (2008).
- 12) A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski and J. Sully, "Black Holes: Complementarity or Firewalls?," *JHEP* **1302**, 062 (2013).
- 13) J. Maldacena and L. Susskind, "Cool horizons for entangled black holes," *Fortsch. Phys.* **61**, 781 (2013).
- 14) J. ボルチンスキー, "ストリング理論" 丸善出版, 2012 年.
- 15) A. Strominger and C. Vafa, "Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy," *Phys. Lett. B* **379**, 99 (1996); C. G. Callan and J. M. Maldacena, "D-brane approach to black hole quantum mechanics," *Nucl. Phys. B* **472**, 591 (1996).
- 16) O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, "Large N field theories, string theory and gravity," *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000).
- 17) T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, "M theory as a matrix model: A Conjecture," *Phys. Rev. D* **55**, 5112 (1997).
- 18) M. Hanada, J. Nishimura, Y. Sekino and T. Yoneya, "Monte Carlo studies of Matrix theory correlation functions," *Phys. Rev. Lett.* **104**, 151601 (2010); "Direct test of the gauge-gravity correspondence for Matrix theory correlation functions," *JHEP* **1112**, 020 (2011).
- 19) R. Hübener, Y. Sekino and J. Eisert, "Equilibration in low-dimensional quantum matrix models," *arXiv*: 1403.1392 [quant-ph].
- 20) 鈴木康夫 "ソフトマター物理学とその応用" 数理科学 2014 年 2 月号 p.46-51.
- 21) 鈴木康夫, Henri Orland "2 次元非対称クーロン系のコステリッツ=サウレス相転移" 拓殖大学理工学研究所報告, Vol.13 (2014) 15-22.

抄録

ABSTRACTS

ツイストペア線を接続した同軸ケーブルのコモンモード電流の予測*

Estimation of Common Mode Current on Coaxial Cable with Twisted Wire Pair**

Takehiro Takahashi***

Li Niu****

Todd Hubing****

Abstract

In this study, common mode current, a dominant factor of unintentional radiation, on coaxial cable with twisted wire pair (TWP) is estimated. This cable model is a simplified model of a popular combination of balanced and unbalanced circuit, such as printed circuit board (PCB) with TWP. For the convenience of calculation and measurement the coaxial cable is employed as an unbalanced circuit instead of PCB. The estimation method is based on the imbalance theory which focuses on the difference of balance factors between connected circuits, and some effects of TWP are considered. According to the theory the common mode current is proportional to a differential mode voltage at the connecting point. Thus the differential mode voltage is calculated by cable transmission theory with accounting on TWP electrical characteristic and radiation impedance of cables. The estimated result is compared with measurement, and good agreement is obtained.

Keywords: electromagnetic radiation, coaxial cable, twisted wire pair, imbalance difference, common mode current

1. Introduction

In this paper, a model of the coaxial cable with attached twisted wire pair (TWP) is studied as a typical connection model of unbalanced and balanced circuit. Instead of PCB, the coaxial cable is employed which works as perfectly unbalanced transmission line. It helps us to avoid analytical complication of calculation for estimation. On the other hand, the TWP is used as balanced transmission line. The imbalance difference method^[1] is applied to this model and the common mode current is calculated for estimation of radiation. The extremely wound and short pitched TWP is also employed to enhance the effect the role of TWP. The results are compared with both numerical calculation and measurement.

2. Common Mode Current on Coaxial Cable with TWP

The model is shown in Fig.1 (a). At the end point of the coaxial cable, input impedance of the TWP Z_{inW} and antenna input impedance Z_{inA} are loaded as shown Fig. 1 (b). The input impedance Z_{inW} of the TWP is calculated by

$$Z_{inW} = Z_{0W} \frac{Z_L \cosh \gamma_W L_{WN} + Z_{0W} \sinh \gamma_W L_{WN}}{Z_L \sinh \gamma_W L_{WN} + Z_{0W} \cosh \gamma_W L_{WN}} \quad (1)$$

, where Z_L , Z_{0W} , γ_W and L_{WN} are terminal impedance, characteristic impedance, propagation constant and net wire length of TWP respectively. About Z_{0W} , γ_W and L_{WN} are discussed later. According to the imbalance difference theory the V_{dm} drives

cable as an antenna. Thus this antenna impedance Z_{inA} should be loaded parallel to the Z_{inW} at the connection point of the lines.

The differential mode voltage V_{dm} at the end of the coaxial cable, as shown in Fig. 1 (c), is calculated by

$$V_{dm} = \frac{Z_{inWA}}{Z_{inWA} \cosh \gamma_C L_C + Z_{0C} \sinh \gamma_C L_C} \times V_0 \quad (2)$$

Since the common mode voltage V_{cm} at connection point can be obtained by

$$V_{cm} = 0.5 \times V_{dm} \quad (3)$$

, the common mode current I_{cm} could be calculated using the antenna impedance Z_{inA} by

$$I'_{cm} = \frac{V_{cm}}{Z_{inA}} = \frac{V_{dm}}{2 \times Z_{inA}} \quad (4)$$

The maximum common mode current I_{cm} is observed at the bottom of the coaxial cable at resonant frequency as shown Fig.1 (d), and could be extrapolated using I'_{cm} by

$$I_{cm} = \frac{I'_{cm}}{\cos(\pi / 2 \times L_C / L)} \quad (5)$$

, where L is total length of the model.

* 原稿受付 平成26年10月16日

** International Symposium on Electromagnetic Compatibility 2014 Tokyo (EMC'14/Tokyo)

*** 工学部情報工学科

**** Clemson University, SC, U.S.A.

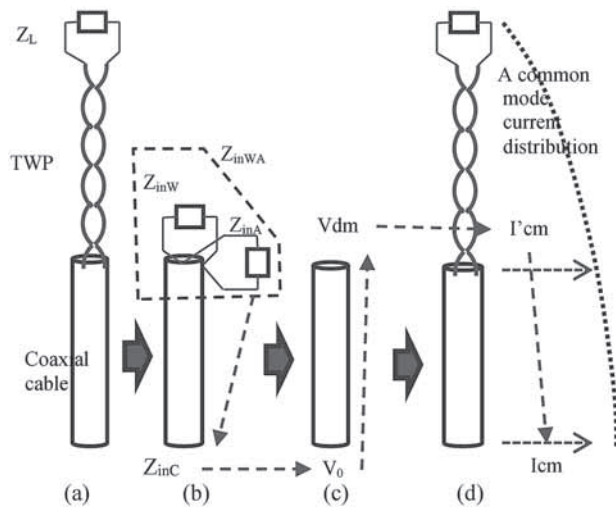


Fig. 1 A process of common mode current calculation.

3. Measurement and Calculation of Common Mode Current on Coaxial Cable with TWP

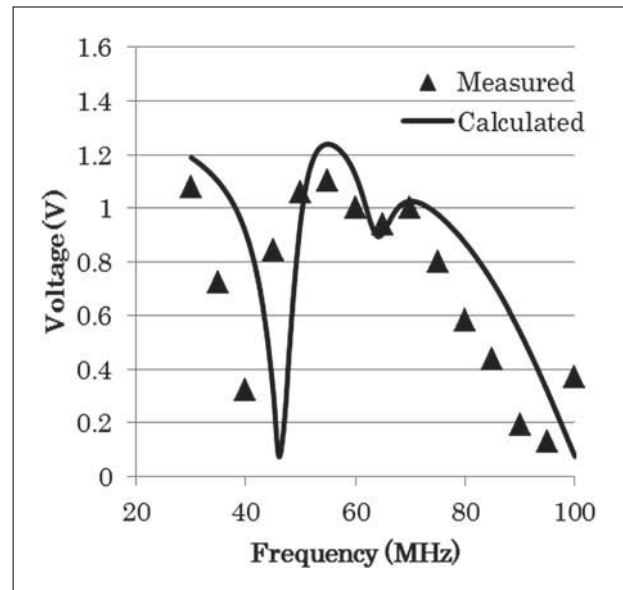
The measurement was carried out on the three cases, coaxial cable with parallel wire pair (para), with 10 mm pitched TWP (twp10) and with 3.3 mm pitched TWP (twp3.3).

The coaxial cable is RG58AU with its length 0.5 m and the TWP is attached to the coaxial cable. All of TWPs are in open termination. The differential voltage of the feeding point at the bottom of the coaxial cable was measured by an oscilloscope and the common mode current at the bottom of coaxial cable was measured with a current probe.

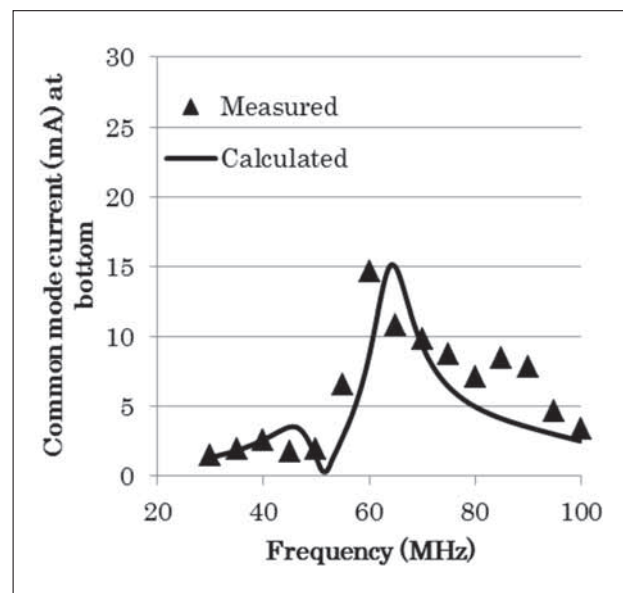
The measured voltages and common mode currents on the case (twp10) are plotted in Fig. 2. The calculated voltage and current are also shown in Fig. 2. The calculated results have some difference with measurement, however, complicated changes in both current and voltage measurement are well estimated.

4. Conclusion

The common mode current on the coaxial cable with TWP was estimated using imbalance difference theory. In order to obtain the common mode voltage, the differential mode voltage at connecting point of lines was calculated by simple transmission line calculation with considering both input impedance of TWP and input impedance of lines which works as antenna. Both input impedance and some other characteristic of TWP are investigated by numerical calculation and measurement including extremely wound TWP.



(a) Differential voltage at bottom.



(b) Common mode current at bottom.

Fig. 2 Voltage and common mode current of 10 mm pitched TWP with coaxial cable (twp10)

REFERENCES

- [1] T. Watanabe, et al., "Common mode current generation caused by difference of unbalance of transmission lines on a printed circuit board with narrow ground pattern," IEICE Trans. Commun., vol. E83-B, no. 3, pp. 593-599, 2000.

- [2] T. Watanabe, et.al., "A prediction method of common mode excitation on a printed circuit board having a signal trace near the ground edge," IEICE Trans. Commun., vol. E87-B, no. 8, pp. 2327-2334, 2004.
- [3] T. Matsushima, et.al., "Increase of common mode radiation due to guard trace voltage and determination of effective via-location", IEICE Trans. Commun., vol. E92-B, no. 6, pp. 1929-1936, 2009.
- [4] T. Matsushima, et.al., "Evaluation of EMI reduction effect of guard traces based on imbalance difference method," IEICE Trans. Commun., vol. E92-B, no. 6, pp. 2193-2200, 2009.
- [5] C. Su, T. Hubing, "Imbalance difference model for common-mode radiation from printed circuit board," IEEE Trans. EMC, vol. 53, no. 1, pp. 150-156, 2011.

留学報告
REPORTS

MIT 留学記

My research stay at MIT

織田 寛 Hiroshi ODA¹

Abstract

Under a support of Takushoku University I had spent a year from August 2013 at MIT (Massachusetts Institute of Technology) in the USA. In a wonderful environment of the MIT mathematics department I could have made real progress in the research of representation theory. By this report I explain what kinds of results I got and how my research and daily life had been like.

1. はじめに

大学の長期留学制度を利用させていただき、2013年8月から1年間、米国マサチューセッツ州のMIT（マサチューセッツ工科大学）に留学しました。本稿では私がその間どのような研究や留学生活を送っていたかをご報告します。

2. MIT 数学科と表現論

MITは米国でも屈指の名門理科大学で、現時点で81人ものノーベル賞受賞者を出しています。残念ながら数学部門のノーベル賞と見なされるフィールズ賞はまだ1人も受賞していませんが、理学部数学科もとても優秀です。そして、数学の中でも**表現論**という分野に関しては全米で最も強い数学教室といわれています。私はこの表現論を研究分野としていますので、MITを留学先に選びました。

ここで表現論について簡単に紹介したいと思います。数学の基本的な代数系に**群**や**環**というものがあります。群というのは、次を満たすような積「 $\cdot$ 」が定義された集合です。

結合律： $(g \cdot h) \cdot i = g \cdot (h \cdot i),$

単位元1の存在： $1 \cdot g = g \cdot 1 = g,$

逆元の存在： $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1.$

例えばベクトル空間Vの可逆な線形変換全体 $GL(V)$ は変換の合成を積とする群です。環については詳しく述べませんが、和「 $+$ 」と積「 $\cdot$ 」の2種類の演算を持った代数系で、例としてベクトル空間Vの線形変換全体 $End(V)$ があります。群や環には、 $GL(V)$ や $End(V)$ などのように具体的に構造がよく分かっているものもあれば、抽象的でその構造を捉えにくいものもあります。そこで、後者のような抽象的な群（あるいは環）の構造の一部を具体的に分かっている $GL(V)$ （あるいは $End(V)$ ）の構造へ映し出すことを考えるのですが、それを**表現**といいます。映し出されるのは構造の一部なので、1つひとつの表現においては情報の多くが失われますが、対象とする代数系は普通十分多くの表現を持っていますので、それらすべてを合わせると情報の喪失を免れることができます。群の表現で量子力学などへの応用上大事なものは**ユニタリ表現**という特殊な表現です。これはVがエルミート内積を持っているときで、 $GL(V)$ の代わりにユニタリ変換全体 $U(V)$ に構造が映し出されます。ユニタリ表現はいつでも最小単位である既約ユニタリ表現の集まりに分解できるので、与えられた代数系に対して既約ユニタリ表現のすべてを分類する（リス

トする）ことは表現論における基本的な問題です。ユニタリとは限らない一般の既約表現の分類は比較的易しく多くの代数系に対して既知なので、既約ユニタリ表現の分類は既約表現のリストのどの部分がユニタリ表現であるかを決定するという問題になります（「**ユニタリスpekトルの決定**」と呼ばれます）。これはなかなか難しく、多くの重要な群や環に対してまだ満足できる結果が得られていません。

さて、群であると同時に多様体であってその上で解析学（微分積分）ができるようなものはLie群と呼ばれます。例えば、特殊線形群 $SL(n, \mathbb{R})$ 、回転群 $O(3)$ 、Lorentz群 $SO(1,3)$ などがそうです。Lie群には積演算が交換法則を満たすような可換群と呼ばれるものと、逆に積演算が交換法則をほとんど満たさない単純群と呼ばれるものがあります。この両極端のクラスに属するLie群の組み合わせの形に分解できるLie群は**簡約Lie群**と呼ばれますが、私はこの簡約Lie群の表現論を研究しています。MITの数学教室は1960年代頃からB. Kostant 名誉教授、S. Helgason教授（2014年秋学期を最後にご退職）などを中心にこの分野を牽引してきました。今回私がMITで研究できるようにお願いしたD. Vogan教授は、長年にわたって簡約Lie群の既約ユニタリ表現の完全な分類を目指して研究されています。

多くの重要な簡約Lie群は、正方行列の集合内の整数係数の多項式による方程式系の解として与えられます。例えば

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{ g : \text{実数係数の } n \times n \text{ 行列で } \det(g) = 1 \text{ であるもの} \}$$

です。ここで行列の係数は実数体 $\mathbb{R}$ を要素としていますが、 $\det(g)=1$ という方程式の係数に現れる整数はどのような体（複素数体 $\mathbb{C}$ のように四則演算ができる代数系）においても意味を持ちますので、係数体を有限体 F_q や p 進体 $\mathbb{Q}_p$ など他のものに変えることができます：

$$SL(n, \mathbb{C}), SL(n, F_q), SL(n, \mathbb{Q}_p), \dots$$

これらに対しても簡約Lie群とよく似た表現論があるのですが、そこで用いられる手法は完全に代数的なものになります。Lie群の場合のように解析学を使うことができないからです。最近Shaw賞を受賞されたMITのG. Lusztig教授は、この代数的手法による表現論の第一人者です。また、MITのR. Bezrukavnikov教授やJ. Kim教授もこの分野で活躍されています。数論では簡約Lie群は係数体がたまたま実数体 $\mathbb{R}$ になっているものと考え、係数体が p 進体であるものと同列にあるものと考えますが、その場合Lie群という用語を使わずに、前

¹ 工学部基礎教育系列

者を実簡約群、後者を p 進簡約群と呼ぶのが通例です。前述のように両者の表現論の結果はよく似ているのですが、これは「Harish-ChandraによるLefschetzの原理」と呼ばれています。手法が全く異なるのに結果が似ているのには何か理由があるのだらうと誰しもが思いますが、あまり合理的な説明は知られていません。

MITにはこの他に無限次元代数系の表現を研究されているV. Kac教授やP. Etingof教授がおられます。

3. Vogan先生との出会い

初めてVogan先生とお会いしたのは、先生が2007年に来日されたときです。私も属する日本の表現論研究者グループが、先生に以下の2つの研究集会での連続講演を依頼しました。8月20日～24日に東京大学玉原国際セミナーハウスで行われた「玉原表現論研究集会 2007 — Geometry and Representations in Lie Theory」と、8月27日～31日に北海道大学で行われた「Sapporo Lectures on Representations in Lie Theory」です。最初の集会では私は聴衆の1人に過ぎませんでしたが、次の集会では私も「Cherednik operators and radial parts of non-symmetric elements」と題する3回の連続講演を行いました。実簡約群 $G(\mathbb{R})$ を扱うとき難しい点は、一般にはコンパクト（≡全体の体積が有限）ではなく、いろいろな量を群全体で積分して平均化するという手法が使えないことです。そこで、 $G(\mathbb{R})$ に含まれるようなコンパクトな部分群 K をできるだけ大きくとって、取りあえず K に制限して議論するという方法がよく取られます。例えば、 $G(\mathbb{R})$ の既約表現 V を制限して K の表現と考えると V は K のいくつかの既約表現の和に分解しますが、このとき現れる K の既約表現は V の「 K タイプ」と呼ばれます。この「 K タイプ」は V 进行分类する際に重要なデータとなります。一番扱い易い K タイプは「自明な K タイプ」というもので、すべての K の要素が恒等変換につぶれてしまう1次元表現ですが、私はこの年に発行された論文 [1] の中で「single-petaled K タイプ」という自明な K タイプに準ずる性質を持つ K タイプの概念を導入していました。北海道大学の連続講演ではこの K タイプの性質とそれを用いた「一般化された動径成分公式」（本稿後半で少し詳しく説明します）について紹介したのですが、特に前者の結果にVogan先生が興味を示してくださいました。

自明な K タイプを含むような $G(\mathbb{R})$ の既約表現はsphericalな既約表現と呼ばれます。係数体を p 進体に変えた $G(\mathbb{Q}_p)$ にも同様の概念がありますが、sphericalな既約表現进行分类するパラメータは係数体に依らずすべて同じです。これらのうちユニタリ表現となるものもLefschetzの原理によりかなりうまく対応すると予想できますが、実際Cornell大のD. Barbasch教授によって G がsplit型古典群という特別な簡約群のときには両者が一致することが確かめられました^[2]。表現 V がユニ

タリであるためにはまず正定値とは限らない内積のようなものがりますが、そのような内積を持つ表現はエルミート表現と呼ばれます：

$$\{ \text{sphericalな表現} \} \supset \{ \text{sphericalなエルミート表現} \} \supset \{ \text{sphericalなユニタリ表現} \}$$

sphericalな表現のうちエルミートであるものを決めるのは容易で、その結果は係数体に依りません。そこで、Barbasch教授はエルミート表現の中でユニタリにならないものをしらみつぶしにチェックしました。この非ユニタリ性テストで使われたのが「petite K タイプ」という特別に小さい K タイプです。 K タイプはもともと $G(\mathbb{R})$ に対する概念ですが、petiteであるものは $G(\mathbb{Q}_p)$ の表現の非ユニタリ性テストにも用いることができ、 $G(\mathbb{R})$ の表現と対応する $G(\mathbb{Q}_p)$ の表現の非ユニタリ性を同時に確認することが可能になります。このアイデアはBarbasch教授とVogan先生と一緒に考案されたそうです。私が導入したsingle-petaled K タイプはpetite K タイプを含む少し広いクラスで、petite K タイプ同様に非ユニタリ性テストに用いることができ、petite K タイプと違ってsplit型古典群以外の簡約Lie群 $G(\mathbb{R})$ にも定義されるという特徴を持っています。

Vogan先生は帰国された後、split型古典群以外のsphericalな既約表現の分類においてもLefschetzの原理が成り立つか調べるのにsingle-petaled K タイプを用いるのが有効ではないかと考えられ、当時指導されていた大学院生の1人にも博士論文のテーマとして「single-petaled K タイプの分類」を勧められていました。

4. 留学準備

今回の長期留学に応募したのは2012年6月ですが、留学計画書を提出する前にVogan先生にEメールでMITに一年間滞在することが可能か訊ねました。Vogan先生は最初、

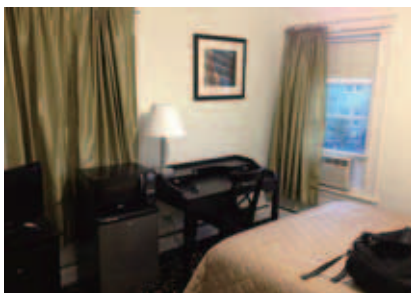
- ・ ちょうど留学を開始する2013年8月から数年にわたるMITの数学棟の建て直し（renovation）が始まり、その後訪問研究者向けに十分なスペースが取れるか分からないこと、
- ・ アメリカ数学会の会長に就任（2013–2015）するので、先生自身の数学の研究をする時間が以前より減るであろうこと、

を挙げられ、他の大学に留学の方が有意義かも知れないという返事をされました。しかし私がMITで研究することを強く希望していることを告げると、直ぐに客員教授として滞在して研究できるように手続きしてくださいました。

拓殖大学へ提出した長期留学計画が承認された後は、少しずつ準備をしていきました。VISA申請、航空券、下宿先の確保、医療保険への加入などはもちろんですが、荷物を少なくするために普段参照している書籍の多くを電子化しました。英

会話は聞き取りが苦手なので、無料で利用できる「English as a Second Language Podcast (<http://www.eslpod.com/>)」や「Voice of America, Learning English(<http://learningenglish.voanews.com/>)」の音声メディアを通勤中などにできるだけ聴くようにしましたが、これは留学中も続けました。

5. MITへ



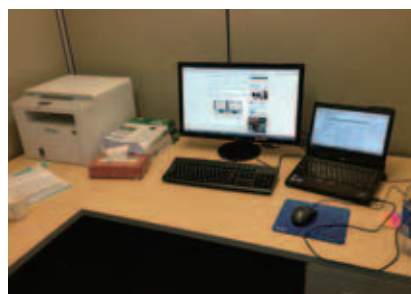
最初に短期滞在した下宿

2013年8月15日に家族を残して単身日本を立ちました。日本で決めていた下宿は9月にならないと入居できなかったため、それまでは短期滞在ができるB&Bのようなところを利用しました。ケンブリッジ市の幹線道路であるマサチューセッツ通り沿いですが、中心地から少し離れたデビス駅の近くで、隣にカトリック教会の建つ静かなところでした。到着したのは現地時刻8月15日(木)の深夜でしたが、翌朝は早起きしてハーバード大学の構内、ハーバードスクエア、チャールズ川などをランニングしながら観光しました。週末は生活立ち上げに忙しかったので、8月19日(月)に初めてMITを訪ねました。

午前中は4つの事務室をまわってIDカード作成などの手続きを済ませ、午後にVogan先生とお会いしました。早速数学の議論になり、先生は、Gがsplit型古典群のときにBarbasch教授が示した前述の結果は一般には成り立たないことを例を挙げて教えてくださいました。私はsingle-petaled Kタイプを使ってBarbasch教授の類似の結果を得ようとしていたので、有益な情報でした。



Vogan先生と



私のオフィス

数学科は前述どおり建て直しのため、MITの事務関係の部署が集まる建物(E18とE19という連結した2棟)の3階と4階に間借りしていました。Vogan先生のオフィスは4階で、同じフロアに私もオフィス(cubicle)を頂きました。数学の神様のような先生方と狭いフロアをシェアするような緊張感あふれる研究生生活は今後二度とないだろうと思い、休日を含めなるべく毎日大学に通いました。

私のオフィス(cubicle)は大学院生より広めで、快適に研究生生活を送ることができました。MITは図書館が充実していますし、主要な電子ジャーナルと契約しているので必要な論文や専門書籍はすべて利用できました。ノートパソコンに接続する日本語キーボード、マウス、セカンドモニタ、レーザープリンタを購入した後は、研究に足りないものは何もありませんでした。

6. Ciubotaru博士とMiličić教授

D. CiubotaruさんとD. Miličić教授は2人とも表現論を研究するユタ大学数学教室の教員です。9月になって秋学期が始まったころは、Ciubotaruさんは半年間の研究休暇、Miličić教授は1年間の研究休暇に入ったばかりでしたが、2人ともMITを最初の滞在先としていました。Ciubotaruさんは3週間ほど、Miličić教授は半年間MITに滞在しました。Ciubotaruさん私は昔からの友人です。彼はもともと前述のBarbasch教授の弟子で、主にp進簡約群の研究をしています。p進簡約群の表現は、Lusztig教授の「還元原理」により次数Hecke環という別の簡単な代数の表現の問題に帰着させて研究するのが常套手段です。実は私のsingle-petaled Kタイプの理論は、実簡約群の表現をやはり次数Hecke環の表現の問題に関連させて考察するというものなので、p進簡約群の還元原理との間にLefschetzの原理のような類似性があります。Ciubotaruさんはこの観点から私の結果に興味を持っていて、実際私の結果を使ってユタ大学のP. E. Trapa教授とともに実簡約群の表現を次数Hecke環の表現に写す関手と呼ばれる対応を構成しました^[3]。

Vogan先生は学期中「MIT Lie Groups Seminar」というセミナーを運営しておられますが、私やCiubotaruさん、Miličić



秋学期開始のパーティ（左がCiubotaruさん）

教授はMIT滞在中常連参加者でした。秋学期のセミナーはVogan先生の講演で始まり、第2回、第3回はCiubotaruさん、第4回は私が講演しました。CiubotaruさんはVogan先生の研究テーマの1つであるRiemann対称空間上のDirac作用素の理論の次数Hecke環に対するアナロジーについて講演し、私はRiemann対称空間上の微分作用素の動径成分が、動径上定義された関数への次数Hecke環の作用と捉えられるという「一般化された動径成分公式」について話をしました。私とCiubotaruさんの話を組み合わせると、Riemann対称空間上のDirac作用素の“動径成分”として次数Hecke環のDirac作用素が自然に現れ、両者を関係づけることができそうです。Ciubotaruさんの滞在中に2人で何度か議論したこのテーマに関しては、今も共同研究が続いています。

7. ケンブリッジ、ボストンでの生活

秋学期の始まる直前に、1年弱過ごした長期の下宿に移りました。MITのあるケンブリッジは家賃相場が高く、かなり安い方であったこの物件も毎月\$1,400しました。その分MITには徒歩20分、地下鉄最寄り駅まで徒歩3分の好立地で、光熱費や水道代はすべて家賃に含まれていました。家主が1階でコインランドリーを経営しているということも便利でした。



約1年間滞在した下宿

生活費を節約するために、車は持たず、ケーブルテレビも契約しませんでした。食事は3食自炊し、大学には毎日弁当を持参しました。下宿と大学の間に大きなスーパーがあり、下宿の近くに日本食の食材を扱う店がありました。

趣味のランニングはケンブリッジでも続けて、4月21日のボストンマラソンまでは2日に1度14~15km（冬場は大学のスポーツジムのトレッドミルを利用しました）、ボストンマラソン後は2日に1度11kmのペースで走っていました。練習コースは専らチャールズ川沿いでしたが、美しいボストンの四季を堪能することができました。秋から冬にかけて3回のハーフマラソンの大会に出ました。この地域の小規模の大会は日本ほどレベルが高くなく、それぞれの大会で総合2位、総合6位（カテゴリー別1位）、総合1位を取ることができました。ボストンマラソンは唯一参加したフルマラソンで、3:07で完走しました。さすがに歴史ある大会だけあって運営、応援、コースなどすべてが素晴らしかったです。1年前のテロに屈しないよう、半年以上前から「Boston Strong」の標語のもとにボストン周辺地域が一丸となって大会を盛り上げていたのも印象的でした。

ケンブリッジの気温は一年を通じて大体青森と同じくらいです。冬は確かに寒いのですが、雪はそれほど多くなく、積もったときも除雪が徹底しているせいか長く残りません。下宿もMITの数学教室も24時間暖房が効いていましたので、片道徒歩20分の移動時間さえ我慢すれば、あとはTシャツで過ごすことができました。

8. Gonzalez教授

F. Gonzalezさんはタフツ大学数学教室の教授です。タフツ大学は日本人には村上春樹が教鞭をとっていたことで有名ですが、ケンブリッジ市の隣のメドフォード市にあって、最初に短期滞在した下宿の最寄り駅であるデイビス駅から歩いていくことができます。Gonzalezさんは日本びいきで、日本人共同研究者を訪ねてほぼ毎年來日しています。私の指導教官であった大島利雄先生（現城西大学教授）とも旧知の間柄で、



Gonzalez教授の研究室

私も日本で何度か会っていました。大島先生のお心遣いで今回私が留学することがGonzalezさんに伝わっていて、MITでの留学生活を始めるや否やGonzalezさんからEメールが来ました。写真はそのとき訪ねた彼の研究室で撮ったものです。

Gonzalezさんも表現論の研究者で、「MIT Lie Groups Seminar」の常連の1人です。もともとはHelgason教授の弟子なので、Helgason流の解析学的手法によって研究しています。私の研究も解析学的な側面は完全にHelgason流なので、彼とは数学的な共通点が多く、何度も有益な議論ができました。その中で、私はあまり知らなかったHelgason-Fourier変換^[4]という少し大がかりな理論について手ほどきを受けました。後述しますように、このことは留学中私がした仕事の内容にとっても大きな影響を与えています。

Gonzalezさんは数学だけではなく、ボストンでの生活についてもいろいろとアドバイスしてくれました。また、タフツ大学数学教室のコロキウムや食事会、休日の遠出にも誘ってもらいました。10月に日本から貝塚公一さん（現学習院大学教員）がGonzalezさんに呼ばれて滞在されましたが、その際ニューヨークへの小旅行に同行しました。11月の感謝祭の頃はGonzalezさんの共同研究者である寛知之さん（岡山大学教授）が滞在していましたが、一緒にGonzalezさんのホームパーティに参加させてもらいました。12月にはクリスマスのホームパーティに呼ばれ、翌年6月には息子さんと一緒にプロビンスタウン（ケープコッドの先端にあるリゾート地）に連れて行ってもらいました。Gonzalezさんのおかげで留学生活が数学研究だけではない豊かなものになったと思います。

9. 動径対のアイデア

実簡約群 $G(\mathbb{R})$ に対して次数Hecke環 H が定まり、single-petaled K タイプは両者の表現論を結びつけていると述べましたが、これについてももう少し詳しく説明します。

まず $G(\mathbb{R})$ に対してRiemann対称空間 X という距離が測れる空間が定まり、 $G(\mathbb{R})$ は X 上の各点の間の距離を変えないような X 全体の変換を与えます。そのうち $G(\mathbb{R})$ の部分群 K が与える変換は“原点を中心とする回転変換”のようなもので、この“回転”の方向に対して横断的な向きに延びた“動径”に相当するある部分集合 A が X 内に定まります。 X 上の K 不変（“回転不変”）な関数は A に制限すると“偶関数”のような小さい対称性を持つ関数（ W 不変な関数と呼ぶことにします）になりますが、「この制限写像 γ が X 上の K 不変な関数と A 上の W 不変な関数の間の1対1対応を定める」というのが古典的なChevalley制限定理の内容です。私は[1]で、この1対1対応を X 上の関数で、 K による変換のもと任意のsingle-petaled K タイプと同じ振る舞いをするものにまで拡張したのですが、 γ によって対応する先の関数の振る舞いは次数Hecke環 H を使って記述されます（「一般化されたChevalley制限定理」）。

さて、 K による変換のもとsingle-petaled K タイプと同じ振る舞いをする関数 f に K 不変な微分作用素 Δ を施しても、 K に対する振る舞いは変化しません。従って Δf を A に制限した $\gamma\Delta f$ も H に対して γf と同じ振る舞いをしますが、実は A 上の関数に作用する微分差分作用素（微分作用素の部分と差分作用素の部分を持つもの） $\text{rad}(\Delta)$ が f に依らずに定まって

$$\gamma\Delta f = \text{rad}(\Delta)\gamma f$$

が成り立ちます。これを「一般化された動径成分公式」と呼んでいます。また、 f が K 不変で Δ がsingle-petaled K タイプと同じ振る舞いをする場合も同様の公式が成り立ちます。この結果は2007年には得て各所で口頭発表していたのですが、どこか定式化が不完全な気がして長い間論文にしていませんでした。

既に述べましたが、2013 - 2014年秋学期が始まって早々「MIT Lie Groups Seminar」の第4回目の講演者を引き受けました。論文にできずに少し行き詰っていた「一般化された動径成分公式」について発表しようと準備していましたが、思いがけず「 f と Δf がそれぞれがsingle-petaled K タイプ（異なるものでよい）と同じ振る舞いをしてさえいれば、一般化された動径成分公式が成り立つ」ことが分かりました。言い換えると、 Δ の K に対する振る舞い方は全く関係なかったのです。この定式化は自然でしたのでセミナーでは自信を持って発表できました：

2013/09/25 “Differential-difference operators and radial part formulas for non-invariant elements.”

「一般化された動径成分公式」が満足のいく形に定式化できたので、セミナー発表後に論文にまとめる作業に入りましたが、この作業中に「動径対」という概念に至りました。これは次のようなものです。 X 上の無限回微分可能な関数の空間を $C^\infty(X)$ とし、 A 上の同様の空間を $C^\infty(A)$ としますと、それぞれは自然に $G(\mathbb{R})$ と H の表現の空間になります。「一般化されたChevalley制限定理」と「一般化された動径成分公式」は、 $G(\mathbb{R})$ の表現と H の表現の対（ $C^\infty(X)$, $C^\infty(A)$ ）に対するものですが、定式化には抽象的な表現論のことはしか必要としません。そこで、一般に $G(\mathbb{R})$ の表現 $M_{G(\mathbb{R})}$ と H の表現 M_H の対 $M=(M_{G(\mathbb{R})}, M_H)$ があるとき、抽象的に定式化した「一般化されたChevalley制限定理」や「一般化された動径成分公式」が成り立つかどうかを問題にすることができます。両方成り立つとき、 M を「動径対」と呼ぶわけですが、より正確には動径対全体と動径対の構造を尊重するような動径対間の関係は圏というものをつくります。

p 進簡約群 $G(\mathbb{Q}_p)$ の表現論は「還元原理」により H の表現論に帰着され、実簡約群 $G(\mathbb{R})$ の表現論と $G(\mathbb{Q}_p)$ の表現論はよく似ています（「Lefschetzの原理」）。従って $G(\mathbb{R})$ の表現論と H の表現論が似ていることになりませんが、この類似性も「Lefschetzの原理」と呼ぶことにします。 $G(\mathbb{Q}_p)$ と H の表現

論の間に確立された還元原理と違い、実はLefschetzの原理にはこれまで厳密な定義がありませんでした。ただ2つの表現論の随所に見られる類似性の総称として「Lefschetzの原理」という用語が使われていたのです。ところが動径対の概念はLefschetzの原理に1つの定義を与えます。つまり、「 $(M_{G(R)}, M_H)$ が動径対である」ことを「 $M_{G(R)}$ と M_H がLefschetzの原理における対応物である」と考えるのです。

このアイデアを得てから、2つの表現論の類似している表現の対をいろいろと調べてみると、面白いようにすべてが動径対になっていました。表現だけでなく、表現を結ぶ線形写像にも2つの表現論で互いに類似したものがあります。例えば、Poisson変換と呼ばれる積分変換とそのH版、2つの表現論でどちらもKnapp-Stein型の繋絡作用素と呼ばれるもの、Helgason-Fourier変換と呼ばれる $C^\infty(X)$ に対するFourier変換とOpdam-Cherednik変換と呼ばれる $C^\infty(A)$ に対するFourier変換などです。このような線形写像の対がLefschetzの原理において対応していることも動径対の圈のことばで自然に定義できますが、上で挙げたものが実際に対応していることを証明することができました。前述のとおりHelgason-Fourier変換はGonzalezさんと議論するようになるまであまり馴染みのないものでした。しかし、Helgason-Fourier変換とOpdam-Cherednik変換は誰もが認める強い類似性を持っていますので、これらが厳密に対応していることを証明できたのはとても意味があると思います。

私は数年前から、Hの表現を $G(R)$ の表現に写す関手と呼ばれる対応を構成する研究もしていましたが、構成はできるものの似たようなものが何種類もできてしまって、どれが自然なものなのか長い間分からないでいました。ところが、ある関手 Ξ を考えると、Hの任意の表現 M_H に対して $(\Xi(M_H), M_H)$ が良い性質を持つ動径対になることが分かりました。それは、 $(M_{G(R)}, M_H)$ が動径対であるとき、 $M_{G(R)}$ から M_H と関わりを持たない部分を削ぎ落としたものが $\Xi(M_H)$ と同じになるという性質です。こういう関手 Ξ が構成できることは2つの意味があります。まず、Hの任意の表現 M_H は $\Xi(M_H)$ というLefschetzの原理で対応相手となる $G(R)$ の表現を実際に持っているということで、もう1つは M_H の対応相手は本質的に $\Xi(M_H)$ しかないということです。

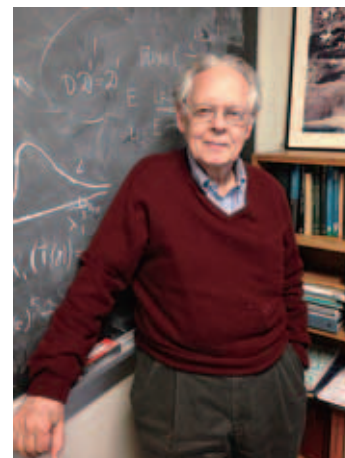
9月末のセミナーで発表してから翌年1月くらいまでとても順調に研究が進んで、これらが解明されました。結果をまとめた117頁の論文[5]が完成したのは2月です。その内容は、「MIT Lie Groups Seminar」でも2回に分けて発表しました：

2014/03/05 “The abstract radial part formula,”

2014/03/19 “Functors connecting semisimple Lie groups and graded Hecke algebras.”

10. Helgason教授

Helgason先生とも以前日本で行われた研究集会でお会いしたことがあります。先生の前で講演したのですが、その内容についてわざわざEメールでコメントを送ってくださいました。先生は80台後半のご高齢にもかかわらずエネルギーで、2014年の春学期まで教鞭をとられていました。一度先生のオフィスを訪ねたとき、学生のレポート



Helgason先生のオフィにて

を1つひとつチェックされていて印象的でした。今回の動径対の仕事は、Helgason先生のお仕事のいくつかと関係していますので、何度か先生に相談に行きました。

その1つは、Chevalley制限定理についてです。この定理にはいくつかバージョンがあります。オリジナルのChevalleyによる多項式関数に対するもの、Helgason先生による複素整関数に対するもの、Helgason先生の元学生のJ. Dadokインディアナ大学教授による無限回微分可能な関数に対するものなどです。私の以前の仕事[1]ではChevalley制限定理をK不変でない関数に拡張しましたが、その手法はDadok教授に倣いました。今回の仕事では実解析関数に対するChevalley制限定理が必要になったので、まず既知の結果であるか質問しました。先生はおそらくまだ証明されてないと答えられ、Dadok教授の手法の一部を変えれば証明できるのではないかとアドバイスしてくださいました。この実解析関数バージョンは、結局Helgason先生の手法に一番近いやり方で証明できました。

もう1つは、先生の若い頃にされた大きな仕事であるHelgason-Fourier変換^[4]に関するものです。ユークリッド空間上の有界な台を持つ関数のFourier変換像はPaley-Wienerの定理によって(1)複素整関数への拡張可能性と(2)虚軸方向の増大度で特徴づけられます。それと同じことをRiemann対称空間X上の有界な台を持つ関数に対して行ったのがHelgason-Fourier変換の理論ですが、像が、(1)スペクトル変数に関する複素整関数への拡張可能性、(2)スペクトルの虚軸方向の増大度、(3)他の変数に関する無限回微分可能性、(4)有限群による対称性の4つの性質で特徴づけられるというものです。クリスマスの頃にHelgason先生の証明を読んでいたとき、(3)が実は「他の変数に関する連続性」だけで十分なことに気が付きました。(3)の条件をそのように変えると、像の作る関数空間が自然な位相（関数の間の距離のようなもの）を持ち、線

形位相空間というものになります。つまり Helgason-Fourier 変換の理論が位相的な定理にもなっていたのです。動径対の論文[5]では Helgason-Fourier 変換の位相的性質を使う必要があったため、上の事実が正しいことを一緒に先生のもとの証明を読んで確認していただきました。写真はのとき撮らせていただいたものですが、黒板に「 $D\mathcal{O}' = \mathcal{O}'$ 」という等式が書かれています。これは先生でさえ長年証明できずにいる難問です。等式を書かれた後、「Helgason-Fourier 変換の理論が位相的な定理になった今では解決できるかも知れないから君も考えてみなさい」と言われてニヤニヤされていました。

11. 数学教室の授業

学期中は「MIT Lie Groups Seminar」以外にも大学院生向けの授業に参加しました。各科目1回90分間の講義が週2回あります。私が聴講したのは、秋学期に開講された Bezrukavnikov 教授の「幾何学的表現論」と Etingof 教授の「D加群」、春学期に開講された Vogan 先生の「実簡約群の表現論の概論」、Lusztig 教授の「Hecke 環入門」でした。数学の神様のような先生方が直々に講義されるので、興奮しました。もっとも「幾何学的表現論」は私には難しく途中で挫折してしまいましたが、MIT 数学教室にはポストドクや訪問研究者が多くいますが、皆学生に混ざって熱心に授業に参加していました。また、Vogan 先生は Lusztig 教授の講義を、Lusztig 教授と Etingof 教授は Bezrukavnikov 教授の講義を聴かれています。Lusztig 教授が最後の講義で「登録した人はみんな A です。平等です」と言われてチョコレートを配られていたのは可笑しかったです。

12. Vogan Conference

5月半ばに春学期が終了して間もなく、MIT で Vogan 先生の還暦を祝う研究集会が開かれました。

2014/05/19-23 “Representations of reductive groups, A conference dedicated to David Vogan on his 60th birthday”

世界中から表現論の研究者が集まりました。日本からの参加者も10名ほどいて、そのうち小林俊行先生（東京大学教授）が講演されました。今回の留学ではケンブリッジでの生活費が高かった分旅費が不足していたのですが、MIT に居ながらにして表現論のトップレベルの研究集会に参加できたのは幸運でした。

集会最終日の午後は、日本からの参加者の何名かにボストンの観光案内をさせられました。また、私の指導教官であった大島先生のご子息の大島芳樹さん（現東京大学IPMU特任研究員）はプリンストン研究所に留学中でしたが、彼もこの集会に参加していました。大島先生の友人である Gonzalez さんの提案で、集会終了後の週末に3人で自転車をレンタルし、

中華街やボストン美術館などを廻りました。

13. Ciubotaru-Trapa 関手

留學生活の終盤は、Ciubotaru さんと Trapa さん（ユタ大学教授）の構成した関手 F について研究しました。彼らの関手 F は実簡約群 $G(R)$ がある系列に属する場合に構成され、 $G(R)$ の表現を対応する次数 Hecke 環 H の表現に写すものです。私が動径対の研究で構成した関手 Ξ は逆向きの対応ですが、 H の任意の表現 M_H に対して $F\Xi(M_H) = M_H$ が成り立ちます（ Ξ は F の右逆と呼ばれるものになっています）。この性質をもとに、 H の既約表現のパラメータの空間を $G(R)$ の既約表現のパラメータの空間に埋め込むことができること、表現のエルミート性が埋め込みの前後で変わらないことなどを示すことができました。しかしこの研究は未完成で、まだ明らかにしたいことが多く残っています。

14. 帰国

春休みに一度日本から家族が来ましたが、帰国前の8月12日の晩に再び家族がケンブリッジにやって来ました。最後の10日間をケンブリッジやボストンで一緒に過ごすためです。翌13日はボーガン先生との最後の食事会で、家族共々ご馳走になりました。その後は、ニューイングランド水族館、科学美術館（+プラネタリウム）、ブルーデンシャルタワー展望フロア、ボストン美術館、ハーバード歴史博物館、イザベラ・スチュワート・ガードナー美術館を家族と廻りました。8月21日早朝にボストンを発ち、翌22日に日本に到着しました。

15. おわりに

拓殖大学の長期留学制度により充実した留學生活を送ることができたことをたいへん難しく思います。特に、留學期間中私の分の業務を担当してくださった方々には心より感謝いたします。

参考文献

- [1] H. Oda, “Generalization of Harish-Chandra’s basic theorem for Riemannian symmetric spaces of non-compact type,” *Adv. Math.* 208, pp. 549–596, 2007.
- [2] D. Barbasch, “Relevant and petite K-types for split groups,” in *Functional Analysis VIII, Proceedings of the Postgraduate School and Conference, Dubrovnik, Croatia, June 15–22, 2003*, University of Aarhus, 2004, pp. 35–71.
- [3] D. Ciubotaru and P. E. Trapa, “Functors for unitary representations of classical real groups and affine Hecke algebras,” *Adv. Math.* 227, pp. 1585–1611, 2011.
- [4] S. Helgason, “Radon-Fourier transforms on symmetric

spaces and related group representations," *Bull. Amer. Math. Soc.* 71, pp. 757-763, 1965.

- [5] H. Oda, "Differential-difference operators and radial part formulas for non-invariant elements," *arXiv: 1402.3231*, 2014.

理工学総合研究所員及び研究課題一覧

RESEARCHERS & TITLES

(平成26年度)

機械システム工学科

接着、設計 杉林 俊雄 教 授 工学博士 木原幸一郎 准教授 博士（工学）	・色彩とマティエールのトレサビリティに関する研究 ・接着接合の構造物への応用 ・衝撃負荷を受ける接着接合体に関する研究
ロボット制御 香川 美仁 准教授 博士（工学）	・筋電位を用いたロボットの遠隔操作の研究 ・管内移動作業ロボットの研究 ・ロボット・セラピーの研究
熱物性 松永 直樹 教 授 工学博士	・ガスクロマトグラフ法（テイラー法）による気体の拡散係数の測定 ・蒸発管法（ステファン法）による気体の拡散係数の測定 ・バイオディーゼル燃料の物性に関する研究
流体工学 藤本 一郎 教 授 工学博士 平野 孝典 助 教 博士（工学）	・ジェットエンジンのエアロダイナミックスに関する研究 ・遷音速翼列の非定常空力特性に関する研究 ・風車、送風機の性能向上に関する研究 ・電気自動車の普及と高効率化に関する研究
機械力学 鈴木 保之 教 授 博士（工学）	・圧電素子やSMAを利用した機械構造物の振動抑制方法に関する研究 ・弾性ロータの釣合せに関する研究
振動、計測 道村 晴一 准教授 工学博士	・倒立振子の安定化制御に関する研究 ・弾性ロータの振動制御に関する研究
計算力学 吉田 勉 教 授 工学博士	・最適設計に関する研究 ・材料物性測定に関する研究 ・構造物に作用する外力の固有振動数による測定
機能設計 森 きよみ 准教授 博士（工学）	・耐熱性新素材の開発と高温物性の評価 ・エネルギー源となる植物を生産するための植物プラントシステムに関する研究

電子システム工学科

超伝導エレクトロニクス・カオス応用 吉森 茂 教授 工学博士	- 超伝導送電に関する研究 - 超伝導電力貯蔵に関する研究 - テラヘルツ領域におけるジョセフソン・テトラードの応用に関する研究 - 超伝導マイクロストリップ線路に関する研究
非線形回路・非線形システム 三堀 邦彦 准教授 博士（工学）	- 電子回路のカオスの解析とその応用に関する研究 - 強化学習アルゴリズムとその応用に関する研究 - マルチエージェントシステムとその応用に関する研究
通信・ネットワーク 前山 利幸 准教授 博士（工学）	- 人体通信に関する研究 - ユビキタス・ワイヤレス・ネットワークに関する研究 - 携帯電話の無線性能に関する研究 - 無線中継器に関する研究
ソフトコンピューティング 小川 毅彦 教授 博士（工学）	- 高次元ニューラルネットワークに関する研究 - 不良設定逆問題の解法に関する研究 - 自律移動ロボットに関する研究
デジタル信号処理 杉本 公弘 教授 工学博士	- デジタル音声および画像の処理技法に関する研究 - デジタル音声の広帯域化技法に関する研究 - 障害者支援システム実現に関する研究
林 誠治 准教授 博士（工学）	- 音声通話環境での背景雑音除去および音声強調に関する研究 - 狭帯域電話音声からの高域および低域拡張手法に関する研究 - ロボットを用いたリアルタイム動画画像認識処理に関する研究
渡邊 修 准教授 博士（工学）	- 高効率画像符号化に関する研究 - 画像検索技術に関する研究 - 国際標準化（JPEG、JPEG 2000 等）に関する研究
生体情報システム 川名 明夫 教授 工学博士	- 生体電気活動測定法の研究 - 生体信号解析法の研究 - 神経回路ダイナミクスの研究
医用電子情報工学 長谷川 淳 教授 博士（工学）	- 音響的方法による人工弁機能診断に関する研究 - 高空間分解能振動センサの開発に関する研究 - 振動型マイクロインジェクション法に関する研究 - 生体情報によるフライトシミュレータ訓練の評価に関する研究
超音波工学 渡辺 裕二 教授 工学博士	- 超音波発生用振動体に関する研究 - 超音波の応用に関する研究 - 圧電素子の応用に関する研究
ミリ波工学 常光 康弘 准教授 博士（工学）	- 太陽光発電アレーアンテナの研究 - 高利得ミリ波帯アンテナを用いた空間発光の研究 - 自動車衝突防止用ミリ波帯レーダーアンテナの研究 - ミリ波帯ラジアルライン同心円状導波管スロットアレーアンテナの研究 - 導波管スロットアレーアンテナによる微小信号観測の研究

情報工学科

プログラミング言語処理 岩澤 京子 教授 博士（工学）	• コンパイラの最適化技術の研究 • プログラミング言語と環境の研究 • 自動並列化コンパイラの開発
環境電磁工学 澁谷 昇 教授 理学博士	• 電磁ノイズを考慮した設計支援技術に関する研究 • カメラを用いた入力インターフェースに関する研究 • 自律型ロボットに関する研究
教育情報工学 佐々木 整 教授 博士（工学）	• オープンソースソフトウェアの教育利用に関する研究 • ロジカルフローグラフに基づく理解度評価法に関する研究 • ユビキタス学習環境に関する研究 • 3次元デスクトップ環境の教育利用に関する研究
計算機支援設計 高橋 丈博 教授 博士（工学）	• コンピュータを用いた回路実装設計支援技術に関する研究 • 電磁ノイズ発生メカニズムと低減技術の研究 • 画像を用いたロボット制御
数理情報工学 原田 紀夫 教授 工学博士	• 数理的システム理論の構築とその応用の研究（システムの超調和理論、統計力学的配置理論、並列処理の平均膨張率理論） • 調和グラフによる情報表現とその応用理論 • 人間の目的行為の数理
音響信号処理 幹 康 教授 工学博士	• ヒルベルト変換を利用した遅延時間ならびに音響特性推定法 • 粒状多孔質材料の音響特性 • 時間圧縮法、時間伸長法による異常診断 • カオスを利用した不快音シンセサイザ
高信頼性システム工学 蓑原 隆 教授 工学博士	• ワンタイムアドレスを利用したIPv6通信のプライバシー向上 • 仮想ネットワークを利用したスケーラブルなハニーポットファームの実現 • 競合学習型ニューラルネットワークの耐故障化
計算機システム工学 早川 栄一 教授 博士（工学）	• 組込みシステムを対象とした高信頼オペレーティングシステムとシステムソフトウェア環境 • システムプログラミング教育支援環境 • 次世代コミュニケーション支援システム
画像工学 諸角 建 教授 工学博士	• 不可視情報の可視化 • 映像の持つ潜在的情報の抽出とそれを利用した認識 • 色情報と形状特徴を利用した物体抽出
プログラム解析 西田 誠幸 准教授 博士（工学）	• プログラム解析を利用したソフトウェアの脆弱性検出法 • 安全なWebアプリケーションの開発支援環境 • 計算機アーキテクチャの導入教育支援環境
知識処理 水野 一徳 准教授 博士（工学）	• 知的推論のための組合せ探索アルゴリズムの開発と効率評価 • 制約充足パラダイムによる知識処理と問題解決支援 • マルチエージェントによる複雑現象シミュレーション

工業デザイン学科

感性情報デザイン分野

色彩・造形 木嶋 彰 教授 芸術学修士	・ポストモダン以降の絵画の諸動向に関する研究 ・テクスチャの感性評価に関する研究
感性デザイン 岡崎 章 教授 博士 (感性科学)	・チャイルドライフ・デザインに関する研究 ・デザインにおける感性操作と感性評価に関する研究
コミュニティデザイン 工藤 芳彰 准教授 博士(工学)	・コミュニティデザイン支援に関する研究 ・デザインの歴史文化に関する地域研究

生活デザイン分野

視覚造形 戸塚 泰幸 教授	・考案した印刷技法を応用した銅版画の制作 ・質表現を中心とする陶作品の制作 ・造形表現材の特性研究とデザインへの応用
用品設計 阿部 眞理 教授 博士(工学)	・木材料の開発と製品への応用 ・環境配慮材料の特性研究と用途開発
室内設計 白石 照美 准教授 博士(工学)	・景観および室内空間形態の知覚に関する研究 ・内装用材の特性研究とデザイン開発

デザインシステム分野

プロダクトデザイン 竹末 俊昭 教授	・デザイン発想法への価値分析手法応用 ・レーザー加工機活用のモノづくりカフェ構想
シビックデザイン 永見 豊 准教授 工学修士	・橋梁デザインにおける機能性、経済性、優美性に関する研究 ・道路内部空間におけるシーケンス景観に関する研究

コミュニケーションデザイン分野

視覚デザイン 小出 昌二 准教授	・プリントメディアによるコミュニケーションに関する表現研究 ・印刷加工を応用した平面構成に関する研究と制作
---------------------	--

基礎教育系列・その他

ユニタリ表現論 青木 茂 教 授 理学博士	半単純対称空間上の調和解析
解析学 織田 寛 准教授 博士 (数理科学)	実簡約Lie群の表現論と次数Hecke環の表現論の関係
理論物理学 鈴木 康夫 教 授 理学博士	- ソフトマターに関する研究 - 物理教育に関する研究
素粒子理論 関野 恭弘 准教授 博士(理学)	超弦理論による宇宙論とブラックホールの研究
生物工学 仁木 輝緒 教 授 理学博士	- 植物根組織細胞の生理・形態学的研究 - 生物(細胞)死の研究 - 微生物等の殺菌法システムの開発
計測制御 池田 修 教 授 工学博士	- マルチモーダル検出認識 - 人工知能機械システム
画像解析(外国語学部) 日比 哲也 准教授 工学修士	- 色彩情報を利用した交通標識の画像認識システムの開発 - 視覚情報を認知する自動運転支援システムの開発 - GPSを利用した自動航法システムの開発
栽培土壌学 (拓殖大学北海道短期大学) 岡田 佳菜子 准教授 博士(農学)	- 水稲の養水分環境 - 水稲移植栽培への窒素肥料の利用 - 深川市蛇紋岩質土壌における水稲初期生育不良 - 北海道における水稲直播栽培と生育環境
音響情報処理 (拓殖大学北海道短期大学) 庄内 慶一 准教授 工学修士	- 視覚障害者のための遠隔コミュニケーション支援に関する研究 - e-learningシステムを活用した入学準備教育の研究

理工学系専任教員研究活動一覽・他

ACADEMIC REPORTS & SOCIAL ACTIVITIES

(2013 年 4 月～2014 年 3 月含前年度未掲載分)

【研究業績および研究活動区分】

原稿及び翻訳＝著書 学位論文＝学論 学術論文＝論文 学会等の受賞＝受賞

学会誌掲載の展望・論説等＝展望または論説 調査報告書＝調査 新聞・専門誌への寄稿等＝寄稿

技術等解説＝解説 招待講演＝招待 国際会議・海外・国内シンポジウム等での発表（審査付）＝討論

大会口頭発表・学会研究会＝口頭 学会等の運営＝運営 学会誌及び各種の審査＝審査

団体または企業よりの依頼製作＝依頼 コンペ・団体展公募＝公募 招待出品及び指名設計、依頼出品＝作品

団体・個人展覧会＝展示

機械システム工学科

著者氏名	区分	著者、学術論文、作品等の名称	掲載誌、発行所、学会、講演会、展覧会等の名称	発行・発表年 月	刊号ページ 分担・担当等
鈴木 保之 香川 美仁	論文	圧電アクチュエータで支持された弾性ロータの振動制御と周期外力の推定	日本機械学会論文集(C編)	2013-9-25	79 巻 805 号(2013-9) pp.3122-3134
Y. Suzuki	審査	投稿論文の査読	Smart Materials and Structures	2013	
モハマド・フィルダウス 松 永 直 樹	口頭	加熱劣化した植物油を用いて製造したバイオディーゼル燃料の性状	日本機械学会山梨講演会講演論文集	2013-10	182-183
森 前 山 利 幸 平 林 大 騎 岡 田 武 仁	口頭	根菜類生産のための植物工場に関する基礎的研究	日本機械学会 環境工学シンポジウム 2013	2013-07	pp.388-389
森 前 山 利 幸 大 黒 篤	口頭	水耕と人工培地によるイモ類の屋内制御型栽培法における水環境制御	日本実験力学学会 2013年度年次講演会講演論文集, No.13	2013-08	pp.199-200
森 前 山 利 幸 平 林 大 騎 岡 田 武 仁	論文	屋内水耕栽培による根菜の生育に及ぼす気泡とマイクロジェットの影響	実験力学	2013-12	Vol.3, No.4, pp.366-371

電子システム工学科

著者氏名	区分	著者、学術論文、作品等の名称	掲載誌、発行所、学会、講演会、展覧会等の名称	発行・発表年 月	刊号ページ 分担・担当等
S. Hayashi M. Sugimoto	論文	Speech Enhancement based on The Sequential Noise Estimation with a Masking Property	International Journal of Modelling and Simulation, Vol. 34, No. 1	2014-3	pp.43-51
Dilidaer Kudereti Fujio MIYAWAKI Kenji KOBAYASHI Jun HASEGAWA	論文	Evaluation of Ultrasonic-Range Vibratory Microinjection System at a Frequency of 35kHz Using Fertilized Mouse Eggs	J. Mamm. Ova Res.	2012-05	Vol.29, No.1, pp.48-54
林 誠 治	運営	東京支部学生会顧問	電子情報通信学会	2009～	
前 山 利 幸	解説	MIMO-OTAによるスマートフォン無線性能評価	コーンズテクノロジー Webマガジン、コーンズテクノロジー	2013-07	
太田、前山 他	口頭	人体の影響を考慮した端末用アンテナ指向性の検討	電子情報通信学会アンテナ・伝播研究会、電子情報通信学会	2013-10	pp.31-36
石田、前山 他	口頭	HF帯を用いたHBC利用時における什器の影響	電子情報通信学会第3回医療情報通信技術研究会、電子情報通信学会	2013-11	
田中、前山 他	口頭	実装回路搭載アンテナに関する検討	エレクトロニクス実装学会春季講演大会	2014-03	5A-05Roslina
T. Maeyama et al.	学術論文	Analysis of the HBC Path Loss Occurred in Arm-Waving Motion for Healthcare Monitoring	Body Nets 2013 European alliance for innovation	2013-09	pp.4-7
前 山 利 幸	運営	電子情報通信学会アンテナ伝播専門委員会	電子情報通信学会	2013-05～ 2015-05	委員
K. Yotsuji T. Saito K. Mitsubori	口頭	A Hyperchaotic Circuit with Impulsive Switching Controlled by Refractory Threshold and Spike-Train Input	Proc. International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications	2013-9	pp.425-428
T. Toyofuku K. Mitsubori	口頭	Digital Circuit of Multi-Agent System for Two Pedestrian Streams in A Narrow Path	Proc. International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications	2013-9	pp.471-474
T. Tanigawa T. Kamio K. Mitsubori T. Tanaka H. Fujisaka K. Haeiwa	口頭	Modified Multi-Agent Reinforcement Learning System to Find Ships' Courses	Proc. International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications	2013-9	pp.487-490
風 間 裕 太 三 堀 邦 彦	口頭	待ち行列の長さに基づき目的地を選ぶ非同期的なマルチエージェントシステム	電子情報通信学会非線形問題研究会	2013-7	NLP2013-32
吉 森 茂	運営	超伝導エレクトロニクス研究専門委員会	電子情報通信学会	2013-5～ 2014-4	委員
宮 原 弘 明 吉 森 茂	口頭	ジョセフソン弱結合を用いた超伝導電力貯蔵素子の過渡解析	応用物理学会・平成26年度春季学術講演会	2013-3	
O. Watanabe M. Takizawa	口頭	Updated JNB proposal for JPEG logo	ISO/IEC JTC 1/SC29/WG1	2014-3	N6664
渡 辺 裕 二	解説	強力超音波振動の基礎とホーンの設計および加工への応用	R&D支援センター技術セミナー	2013-9	講師
Di Sun K. Naruse Y. Watanabe	討論	A Study on High Frequency Ultrasonic Metal Joining by Use of Surface Acoustic Wave Device	Proc. MJJIS2013 (MJIIT-JUC Joint International Symposium 2013)	2013-11	pp.261-264
渡 辺 裕 二	解説	強力超音波の基礎と振動ホーン設計・使用法とその応用例	日本テクノセンター 技術セミナー	2014-2	講師

情報工学科

著者氏名	区分	著者、学術論文、作品等の名称	掲載誌、発行所、学会、講演会、展覧会等の名称	発行・発表年・発表月	刊号ページ 分担・担当等
Kyoko Iwasawa	口頭	A Tracking and Visualizing System of Memory Usage along to C Source Programs	Proceedings of ICSEA 2013: The Eighth International Conference on Software Engineering Advances	2013-11	pp.387-380
筒井 優子 岩澤 京子	口頭	初心者向けオブジェクト指向プログラミング学習ゲームの開発	情報処理学会第76回全国大会予稿集	2014-3	5ZD-1
岩澤 京子	審査	Journal 審査	IARIA (International Academy, Research and Industry Association)	2013～	
澁谷 昇	解説	EMC の基礎	月刊 EMC、三松株式会社	2013-4	No.300, pp.71-80, April. 2013
澁谷 昇 他	著書	「電気電子機器における ノイズ 耐性試験・設計ハンドブック」	電気学会「電気電子機器ノイズイミュニティ調査専門委員会」編、科学技術出版(株)、丸善(株)	2013-4	33 名による分担執筆. 編集幹事 3 章 (3.2, 3.3, 3.6, 3.13, 3.17)
澁谷 昇	解説	これからの EMC	月刊 EMC、三松株式会社	2014-1	p.34
澁谷 昇 他	口頭	ビッグテールを持つプリント配線のイミュニティ特性の検討	第 28 回 エレクトロニクス実装学会春季講演大会	2014-3	5A-18 pp.61-62
澁谷 昇 他	口頭	ビッグテールによる放射ノイズの解析	第 28 回 エレクトロニクス実装学会春季講演大会	2014-3	5A-16 pp.55-56
澁谷 昇 他	口頭	EFT/B 試験における不確かさの研究	第 28 回 エレクトロニクス実装学会春季講演大会	2014-3	5PD-07 pp.410～411
Yasushi Miki	論文	Using the logistic map to generate scratching sounds	The Mathematica Journal	2013-5	vol. 15, pp. 1-13
幹 康	招待	ロジスティック写像と不快音	日本数式処理学会 Mathematica 分科会 Workshop	2013-11	
幹 康	招待	ロジスティック写像と不快音	第61回応用物理学会春季学術講演会	2014-3	p. 194
Megumi Kisanuki Satoshi Ono Hirofumi Machii Kazunori Mizuno Shigeru Nakayama	討論	Escher-Like Tiling Pattern Design by Interactive Iterative Genetic Algorithm	NICOGRAPH International 2013	2013-5	Poster
Yuko Aratsu Kazunori Mizuno Hitoshi Sasaki Seiichi Nishihara	討論	Escher-Like Tiling Pattern Design by Interactive Iterative Genetic Algorithm	World Congress on Engineering and Computer Science 2013 (WCECS2013)	2013-10	Vol. I, pp. 560-565
Yuko Aratsu Kazunori Mizuno Hitoshi Sasaki Seiichi Nishihara	討論	Experimental Evaluation of Artificial Bee Colony with Greedy Scouts for Constraint Satisfaction Problems	The 2013 International Conference on Technologies and Applications of Artificial Intelligence (TAAI2013)	2013-11	pp. 134-139
坪山 宰徳 水野 一徳 佐々木 整一 西原 清一	口頭	Swarm を用いたデマンドバスのシミュレーション環境の構築	人工知能学会第27回全国大会	2013-6	203-7in
荒津 裕子 水野 一徳 佐々木 整一 西原 清一	口頭	制約充足型 Artificial Bee Colony における Scout Bee の改良	進化計算学会第5回研究会	2013-9	pp. 53-57

著者氏名	区分	著者、学術論文、作品等の名称	掲載誌、発行所、学会、講演会、展覧会等の名称	発行・発表年・月	刊号ページ 分担・担当等
木佐貫恵 待井寛史 崎元健司 小野智一 水中山徳茂	口頭	エッシャー風タイリング画像作成支援システム	第95回数理解モデル化と問題解決研究会、情報処理学会	2013-9	Vol. 2013-MPS-95, No. 15
荒津裕子 水野一徳 佐々木清一 西原	口頭	制約充足型 Artificial Bee Colony の実験的評価	進化計算シンポジウム 2013, 進化計算学会	2013-12	pp. 322-327
坪山野一 水野一徳 佐々木清一 西原	口頭	Swarm を用いたデマンドバスのシミュレーションの開発	情報処理学会第76回全国大会	2014-3	4T-1
青木慶人 水野山一徳 坪山原清一 西原	口頭	仮想都市交通流におけるデマンドバスの評価	映像表現・芸術科学フォーラム 2014	2014-3	Poster-59
水野一徳	運営	論文委員会	芸術科学会	2009-5 ~	委員
水野一徳	運営	研究会専門委員会	進化計算学会	2013-2 ~	委員
水野一徳	運営	第6回研究会実行委員会	進化計算学会	2013-10 ~ 2014-3	委員 (Web・広報担当)
水野一徳	審査	論文賞表彰委員会	進化計算学会	2013-11 ~ 12	委員 (査読)
水野一徳	運営	第27回全国大会	人工知能学会	2013-6	座長
Kazunori Mizuno	運営	World Congress on Engineering and Computer Science 2013	International Association of Engineers	2013-10	Session chair
水野一徳	運営	第6回研究会	進化計算学会	2014-3	座長
木佐貫恵 待井寛史 崎元健司 小野智一 水中山徳茂	受賞	ベストプレゼンテーション賞	第95回数理解モデル化と問題解決研究会、情報処理学会	2013-9	
Kazunori Mizuno	受賞	Certificate of Merit for International Conference on Soft Computing and Application 2014	World Congress on Engineering and Computer Science 2013 (WCECS2013), International Association of Engineers	2013-10	
望月將高 諸角建	口頭	ウェーブレット変換を利用した画像量子化	電子情報通信学会 2014年総合大会	2014-3	ISS-P-236

デザイン学科

著者氏名	区分	著者、学術論文、作品等の名称	掲載誌、発行所、学会、講演会、展覧会等の名称	発行・発表年・月	刊号ページ 分担・担当等
阿部眞理 白石恵蓮 シムテークチン 戸塚泰幸	論文	植物繊維質材による敷物の物理的・感覚的性質 —現代生活に適した植物繊維質材による敷物の提案 (1) —	日本デザイン学会デザイン学研究論文集 Vol.60 No.6	2014-3	pp.55-64
Sim Teck Ceng Mari Abe Terumi Shiraishi	討論	Survey on Furniture Awareness of Each Race in Malaysia	IASDR 2013	2013-8	
沈得正 三戸部健 胡エンテツ 阿部眞理 白石照美 小幡谷英一	口頭	波形単板コアパネルによる軽量家具のデザイン	第60回日本デザイン学会春季研究発表大会 概要集	2013-6	pp.288-289
沈得正 三戸部健 胡エンテツ 阿部眞理 白石照美 小幡谷英一	受賞	波形単板コアパネルによる軽量家具のデザイン	第60回日本デザイン学会春季研究発表大会 グッドプレゼンテーション賞	2013-6	
沈得正 阿部眞理 白石照美	口頭	マレーシアにおける家具の変遷と室内意匠に関する研究	第60回日本デザイン学会春季研究発表大会 概要集	2013-6	pp.92-93
胡エンテツ 沈得正 白石照美 阿部眞理 小幡谷英一	口頭	家具固定を促す内装デザインの提案	第60回日本デザイン学会春季研究発表大会 概要集	2013-6	pp.342-343
戸塚泰幸 阿部眞理 白石照美	展示	紙でつくるあかり展	八王子市学園都市文化ふれあい財団ギャラリーホール	2013-7	
戸塚泰幸 阿部眞理 白石照美	展示	拓殖大学工学部デザイン学科生活デザインコース授業・研究作品展示	Japan Home Show 2013 (東京ビッグサイト)	2013-10	
阿部眞理	展示	用品設計研究室研究成果展示	2013 諏訪圏工業メッセ	2013-10	
阿部眞理	審査	高等学校職業教科書「デザイン史」審査	文部科学省初等中等教育局	2013.11.7 ~ 2014.3.31	
阿部眞理	運営	評議員	日本デザイン学会		
山下利之 工藤芳彰	論文	企業ロゴと企業イメージに関するラフ集合分析	首都大学東京人文学報	2014-03	No. 458, pp.53-67
禹在勇 植田憲 工藤芳彰 他	調査	地域資源の再発見・再認識に基づく地域づくりに関する報告書	鹿教湯温泉100年ブランド創造プロジェクト「地域デザインプロジェクト2014」	2014-03	地域調査およびデザイン提案
工藤芳彰	寄稿	コミュニティデザインとしての「子どものためのデザイン」の試み	日本デザイン学会デザイン学研究特集号「子どものためのデザイン01」	2013-03	Vol.20, No.3, pp.26-29
富澤俊紀 工藤芳彰	寄稿	知的障がい者のための歯磨き支援アプリケーションの開発	日本デザイン学会デザイン学研究特集号「子どものためのデザイン02」	2014-03	Vol.21, No.1, pp.26-29
笠川芳久 工藤芳彰	口頭	地域イベント「八王子いちよう祭り」を支援するサウンドバムの提案	日本デザイン学会第60回研究発表大会概要集	2013-06	pp.422-423

著者氏名	区分	著者、学術論文、作品等の名称	掲載誌、発行所、学会、講演会、展覧会等の名称	発行・発表年 月	刊号ページ 分担・担当等
富澤俊紀 工藤芳彰	口頭	知的障がい者のための歯磨き支援アプリケーションの開発	日本デザイン学会第60回研究発表大会概要集	2013-06	pp.428-429
工藤芳彰	運営	八王子市文化遺産活用推進事業「八王子市の文化遺産を活かした観光振興・地域活性化事業」	文化庁「平成24年度文化遺産を活かした観光振興・地域活性化事業」	2012-04 ～ 2014-03	専門委員
工藤芳彰	運営		日本デザイン学会	2013	選挙管理委員委員長
工藤芳彰	運営		日本デザイン学会	2013	特設理事（学会誌出版・編集委員会担当）
小出昌二	運営	日本基礎造形学会理事会	日本基礎造形学会	2013-04 ～2015-03	理事
小出昌二	作品	JAGDA やさしいハンカチ展 Part 2	公益社団法人日本グラフィックデザイナー協会企画・運営 Samwon Paper Gallery（韓国・ソウル）他多会場	2013-04 ～06	
小出昌二	作品	平面構成作品	アジア基礎造形連合学会 2013アジア基礎造形連合学会 天津大会 中国・天津美術学院	2013-08	
小出昌二	作品	平面構成作品	日本基礎造形学会 第24回札幌大会 札幌市教育文化会館	2013-09	
小出昌二	作品	東京ミッドタウン・デザインハブ 第44回企画展 「JAGDAやさしいハンカチ展 Part 3 被災地からのことばのハンカチ展」	公益社団法人日本グラフィックデザイナー協会企画・運営 東京ミッドタウン・デザインハブ 他多会場	2014-01 ～	
白石照美	運営	評議員	日本デザイン学会		
白石照美	運営	評議員・関東支部幹事	日本インテリア学会		
沖田実嘉子 竹末俊昭	討論	Guidelines of materials and patterns for producing the Japanese traditional dyeing paper stencils with a laser cutter	KEER 2012(国際感性工学会)	2012-5	CD-ROM 254
沖田実嘉子 竹末俊昭	討論	Adaptability of the materials of the Japanese traditional dyeing paper stencils for producing with a laser cutter（査読付）	DRS 2012（デザインリサーチ学会）	2012-7	CD-ROM 445
竹末俊昭	審査	第7回 レーザー・デザインコンテスト・審査委員長	レーザー・デザインフォーラム	2012-12	総責任者
竹末俊昭	口頭	「ファブリケーションとこれからのデザインについて」	日本デザイン学会・PD部会（招待）	2013-1	パネラー
沖田実嘉子 竹末俊昭	論文	伝統的染色型紙の復刻保存におけるレーザー加工技術の適合性	日本デザイン学会・第60巻-2号（通巻218号）	2013-7	pp.85-94
竹末俊昭	運営	日本感性工学会・論文編集委員会運営委員	日本感性工学会	2006 ～	委員
戸塚泰幸	展示	陶作品展	ギャラリー現（銀座）	2013-12	
永見豊 滝沢正仁	口頭 発表	高速道路出入口における自転車・歩行者による誤進入対策の提案	日本デザイン学会 デザイン学研究 第60回研究発表大会概要集	2013-6	pp.81-82
Masahito Takizawa Julaila Abdul Rahman, Akira Kijima, Yutaka Nagami	論文	Requirements for Comprehensibility of Graphic Symbols, Based on Japanese expressway information board	第5回国際デザイン学会連合国際会議（IASDR 2013）	2013-8	CD-ROM(09B-1)
永見豊	運営	まちづくり専門家	財団法人東京都新都市建設公社 まちづくり支援事業	2010-06 ～	

著 氏	者 名	区分	著者，学術論文，作品等の名称	掲載誌，発行所，学会， 講演会，展覧会等の名称	発行・発表 年 月	刊 号 ペ ー ジ 分担・担当等
永 見	豊	依頼	まちづくり相談	清川・太陽地域再生まちづく り準備会	2010-07 ～	委員
永 見	豊	運営		八王子市公契約に関する調査 研究委員会	2012-10 ～	

基礎教育系列

著者氏名	区分	著者、学術論文、作品等の名称	掲載誌、発行所、学会、講演会、展覧会等の名称	発行・発表年・発表月	刊号ページ 分担・担当等
Hiroshi Oda Toshio Oshima	論文	Quantization of linear algebra and its application to integral geometry	Geometric Analysis and Integral Geometry (Contemporary Mathematics 598), American Mathematical Society	2013-9	189-208
Hiroshi Oda	口頭	Differential-difference operators and radial part formulas for non-invariant elements	MIT Lie Group Seminar	2013-9	
Hiroshi Oda	口頭	The abstract radial part formula	MIT Lie Group Seminar	2014-3	
Hiroshi Oda	口頭	Functors connecting semisimple Lie groups and graded Hecke algebras	MIT Lie Group Seminar	2014-3	
鈴木康夫	寄稿	ソフトマター物理学とその応用	数理科学2月号, サイエンス社	2014-2	46-51
鈴木康夫	寄稿	導電性高分子の発見と開発	数理科学2月号, サイエンス社	2014-2	54-55
鈴木康夫	論文	2次元非対称クーロン系のコストリッ ツ＝サウレス相転移	拓殖大学理工学研究所報告	2014-3	Vol.13, 15-22
鈴木康夫	運営・ 査読	編集委員	日本物理学会「大学の物理教育」	2014	
鈴木康夫	運営	認定審査調整委員	JABEE	2014	
鈴木康夫	運営	研修部会委員, 講師	JABEE	2014	
鈴木康夫	運営	選挙管理委員長	日本物理学会	2014	
鈴木康夫	審査	物理・応用物理分野審査委員長	日本物理学会 JABEE 委員会	2014	
Robert Hübener Yasuhiro Sekino Jens Eisert	論文	Equilibration in low-dimensional quantum matrix models	arXiv.org	2014-3	1403.1392 [quant-ph]
Hajime Aoki Satoshi Iso Yasuhiro Sekino	論文	Evolution of vacuum fluctuations generated during and before inflation	Physical Review D	2014	Vol. 89, 103536
Yoshinori Matsuo Yuya Sasai Yasuhiro Sekino	論文	Linear responses of D0-branes via gauge/gravity correspondence	Physical Review D	2013	Vol. 88, 26020
関野恭弘	寄稿	陽子のサイズが何かおかしい (訳と注釈)	日経サイエンス	2013-4	40-47
関野恭弘	運営	国際会議世話人	国際会議「KEK Theory workshop 2014」高エネルギー加速器研究機構	2013-2	連絡責任者
関野恭弘	審査	論文査読	Progress of Theoretical and Experimental Physics	2014-1	
関野恭弘	招待	Equilibration in matrix quantum mechanics	国際会議「KEK Theory workshop 2014」高エネルギー加速器研究機構	2014-2.18	
関野恭弘	招待	On the energy eigenstates of matrix quantum mechanics	京都大学理学部素粒子論研究室セミナー	2013-6.18	
関野恭弘	招待	On the energy eigenstates of matrix quantum mechanics	茨城大学理学部素粒子論研究室セミナー	2013-5.15	
関野恭弘	口頭	Equilibration in matrix quantum mechanics	日本物理学会第69回年次大会 (東海大学)	2013-3.30	

著者氏名	区分	著者，学術論文，作品等の名称	掲載誌，発行所，学会，講演会，展覧会等の名称	発行・発表年 月	刊号ページ 分担・担当等
T. Niki S. Saito DK. Gladish	論文	Granular bodies in root primary meristem cells of <i>Zea mays</i> L. var. <i>Cuscoensis</i> K. (Poaceae) that enter young vacuoles by invagination: a novel ribophagy mechanism	Protoplasma	2014-3	251;1141-1149
仁木輝緒 斉藤進 森きよみ DK. Gladish	論文	冠根形成について	拓殖大学理工学研究報告	2014-3	13;23-28

その他

著者氏名	区分	著者，学術論文，作品等の名称	掲載誌，発行所，学会，講演会，展覧会等の名称	発行・発表年・発表月	刊号ページ 分担・担当等
Osamu Ikeda	討論	Compensation for Inter-Reflection and Control of Reflection Coefficient for Directional Diffuse Object in Photometric Stereo	Proceedings of 11th IEEE IVMS Workshop: 3D Image/Video Technologies and Applications	2013-6	1-4 page
Osamu Ikeda	論文	Shape Reconstruction in Photometric Stereo Compensating for Inter-reflection and Directional Diffuse Reflection	3D Research (online journal, Springer, Berlin, Heidelberg)	2013-4	Vol. 4, Issue 1, 6 pages
森園子 池田修 坂本憲昭 永田大正 守屋泰正	著書	大学生の知の情報ツールⅠ	共立出版	2012-3	共同執筆
森園子 池田修 坂本憲昭 永田大正 守屋泰正	著書	大学生の知の情報ツールⅡ	共立出版	2012-9	共同執筆

理工学総合研究所	理工学研究報告	表紙デザイン
運 営 委 員	編 集 委 員	
○吉森 茂	○林 誠治	石田 光男
道村 晴一	佐々木 繁	鳥井 貴彦
林 誠治	常光 康弘	
原田 紀夫	水野 一徳	
竹末 俊昭	小出 昌二	
鈴木 康夫	鈴木 賢治	

拓殖大学理工学研究報告
第13巻 第2号
平成27年 3 月 31 日 印 刷
平成27年 3 月 31 日 発 行

兼発行人	吉森 茂
発 行 所	拓殖大学理工学総合研究所 東京都文京区小日向3-4-14 電話 03-3947-7595 (学務部研究支援課)
印 刷 所	株式会社外為印刷

Vol.13 No.2
Mar. 2015

目次

論文

- 水素様原子のSchrödinger作用素とある1次元2体問題の
Schrödinger作用素の関係.....織田 寛 3

設計・作品

- 釜山新交通システムの高架橋デザイン
.....永見豊、久保田善明、王智連、杉山和雄
岡本俊哉、松金伸、審良郁夫、米沢栄二 17

研究速報

- 大規模景観映像生成のためのパーティクルベースビジュアル
シミュレーション法の開発.....菊池 司 23

展望・解説

- 子どものための地域学習ツールのデザインの試み.....工藤芳彰 29
量子多体系としてのブラックホール.....関野恭弘 37

抄録

- ツイストペア線を接続した同軸ケーブルのコモンモード電流の予測
.....高橋丈博、Li Niu、Todd Hubing 47

留学報告

- MIT 留学記.....織田 寛 53

理工学総合研究所所員及び研究課題一覧.....63

理工学系専任教員研究活動一覧・他.....71